

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 9 **UND IHRE GRENZGEBIETE**

S. 385—432

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Tarski, Alfred: Grundzüge des Systemenkalküls. I. Fundam. Math. 25, 503—526 (1935).

An den Anfang ist ein (gegen früher modifiziertes) Axiomensystem „für die allgemeine Metamathematik der deduktiven Theorien“ gestellt, dessen wichtigste Grundbegriffe (neben $\rightarrow, \neg, 0, \mathbf{N}_0, \in, <$) die Menge der logischen Aussagen, L , und die Menge der sinnvollen Aussagen, S , sind. Bei angemessener Interpretation der Grundbegriffe sind die Axiome 2—5 dieses Axiomensystems und das Axiomensystem „der gewöhnlichen Algebra der Logik“ (vgl. dies. Zbl. 11, 2—3) ineinander überführbar. — Die Folgerungsmenge $Fl(X)$ der Menge $X = \{x_i\}$ wird definiert als die Menge der y , für die $\prod_i x_i \rightarrow y \in L$ ist. (Unter anderem gilt also für $x \in S$: $Fl(x, \bar{x}) = S$.) Die De-

inition des deduktiven Systems ist nun: $x \in \mathfrak{S}$, falls $Fl(X) \subset X \subset S$. Für solche deduktiven Systeme $X, Y \in \mathfrak{S}$ wird ein „Systemenkalkül“ mit den folgenden drei Grundverknüpfungen aufgebaut: $X \cdot Y =$ Durchschnitt, $X \vdash Y = Fl(X \vdash Y)$ (wo $\vdash =$ Vereinigung), $\bar{X} = \prod_{x \in X} Fl(\{\bar{x}\})$; besonders die letzte Definition hat in ihrer Eigenart über-

raschende Konsequenzen. Bei angemessener Interpretation der Grundbegriffe gelten im Systemenkalkül die Axiome der gewöhnlichen (bzw. nach Einführung unendlicher Summen und Produkte die Axiome der erweiterten) Algebra der Logik mit Ausnahme des Analogons zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten: „ $X \vdash \bar{X} = S$.“ Der Systemenkalkül steht also in formaler Analogie zum Heytingschen Aussagenkalkül. Ein System heißt nun axiomatisierbar ($X \in \mathfrak{A}$), falls es ein endliches Axiomensystem besitzt oder, was auf dasselbe herauskommt, falls es eine Aussage $x \in S$ gibt, für die $X = Fl(\{x\})$ ist. Diese Definition läßt eine Homomorphie der Klasse \mathfrak{A} zur Klasse der Aussagen erkennen, welche leicht auf die eine Hälfte des folgenden Satzes führt: Ein System ist dann und nur dann axiomatisierbar, wenn es dem Analogon zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten genügt. — Ein System $X \in \mathfrak{S}$ läßt sich stets als unendliche Summe $X = Fl(\{y_1\}) \vdash Fl(\{y_2\}) \vdash \dots$ darstellen, wobei $y_{n+1} \supset y_n$; für $X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$ ist dabei $y_{n+1} \not\vdash y_n$ erreichbar. Besitzen die y_n ein logisches Produkt x (d. h. gilt für eine Aussage z : $z \supset y_n$, und aus $u \supset y_n$ für alle n folgt $u \supset z$), so heißt das System X konvergent: $X \in \mathfrak{C}$. Bei $z \in X$ ist $X = Fl(\{z\}) \in \mathfrak{A}$; es ist $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C} \subset \mathfrak{S}$. Für unendliches \mathfrak{S} ist außerdem $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{C} \neq \mathfrak{S}$. $X \in \mathfrak{C}$ ist äquivalent mit $\bar{X} \in \mathfrak{A}$. Eine Reihe ähnlicher Äquivalenzen sowie weiterer Sätze über axiomatisierbare Systeme (u. a. solcher, bei denen der Bereich \mathfrak{S} in verschiedener Weise eingeschränkt ist) wird angeführt. Beweise sind fast durchweg unterdrückt. *A. Schmidt* (Marburg a. d. L.).

Skolem, Th.: Ein Satz über Zähl ausdrücke. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 193—199 (1935).

Verf. gibt einen neuen Beweis eines Gödelschen Satzes, daß jeder Zähl ausdrück mit einem der besonderen Gestalt $(x_1, x_2, x_3)(E y_1, y_2, \dots, y_n) K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, \dots, y_n)$, mit lauter ein- und zweistelligen Prädikaten in K gleichwertig ist. Gegenüber dem Gödelschen Beweis [Mh. Math. Phys. 40 (1933); dies. Zbl. 8, 289] hat der neue Beweis folgende Vorteile: 1. der Verf. bekommt mit einem Schlage den neuen Ausdruck und nicht erst durch allmähliche Verminderung der Zahl der Allzeichen; 2. der Löwenheimsche Satz zur Bildung gleichwertiger Ausdrücke mit lauter zweistelligen Prädikaten wird nicht vorausgesetzt, sondern mitbewiesen. Der Verf. gibt auch noch eine speziellere Form des mit dem gegebenen Z gleichwertigen Ausdrucks Z' , nämlich die folgende:

Z' ist eine Konjunktion $Z_1 \& Z_2 \& Z_3$, wobei Z_1 , Z_2 und Z_3 bzw. die Form

$$(\xi_1)(E\xi_2, \dots, \xi_n) K_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (\xi_1, \xi_2)(E\xi_3, \dots, \xi_k) K_2(\xi_1, \dots, \xi_k), \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) K_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

mit lauter ein- und zweistelligen Prädikaten in den Kernen K_1, K_2, K_3 haben und übrigens Z_2 als eine Konjunktion mit k Gliedern geschrieben werden kann, deren Präfixe alle die Form $(\xi_1, \xi_2)(E\eta)$ besitzen. *H. B. Curry* (State College, Pa.).

Rosser, J. B.: *A mathematical logic without variables. II.* Duke math. J. 1, 328 bis 355 (1935).

This is the second and concluding part of the author's thesis (for Part I see this Zbl. 11, 2). The thesis as a whole is concerned with the development of a formal system without variables which is essentially a modification of that proposed in the reviewer's thesis (see review of Part I). In the present part the following topics are considered. First, the author develops a theory of integers along the lines suggested by Church (see this Zbl. 8, 289); this theory is similar to that developed by Kleene (see this Zbl. 11, 2); but the present author derives only such results as have a bearing on the purpose of the paper. In particular the author shows that in the case of certain special sequences of entities, such as were defined recursively in the reviewer's thesis, it is possible to find a definite entity Y , such that the n 'th entity in the sequence is Yn^* , where n^* is the entity representing the integer n . Second, the author shows that the principal theorem of the reviewer's thesis is true in a weakened form in the author's system; this theorem is, roughly, to the effect that if X and Y are entities which may be proved equal by an intuitive argument involving variables, then X and Y may be formally proved equal without the use of variables. Third, the author shows that his system is equivalent, in a sense which cannot be precisely explained here, to the first three rules of Church's system (this Zbl. 4, 145). (The paper was submitted for publication earlier than the paper of Kleene above referred to.) *H. B. Curry.*

Schiller, F. C. S.: *Multi-valued logics — and others.* Mind 44, 467—483 (1935).

This is a philosophic discussion pertaining to the nature and purpose of logic. The author distinguishes four inquiries which bear the name of logic, viz.: (1) Aristotelian syllogistic; (2) the metaphysical logic of certain idealistic philosophers; (3) the psychological analysis of thought; (4) logistic. He criticizes each of these, especially the last, primarily with reference to their adequacy for representing the complexities of scientific reasoning. As regards logistic he comes to the conclusion that actual reasoning is too complex to be represented adequately by any logistic system. The paper does not contain any mathematical results; and it bears on multi-valued logics only in the sense that a logic satisfying the author's demand for adequacy would have to be multiple valued to an extraordinary degree. *H. B. Curry* (State College, Pa.).

Dürr, Karl: *Die Bedeutung der Negation. Grundzüge der empirischen Logik. Erkenntnis* 5, 205—227 (1935).

Verf. geht aus von den Begriffen ursprünglicher Satz (u. Satz) (Beispiele: „das ist rot“, „das ist früher als jenes“) und Unverträglichkeit zwischen u. Sätzen. Die Disjunktion $p \vee q$ von u. Sätzen p und q ist „derjenige Satz, der dadurch und nur dadurch zu begründen ist, daß entweder p oder q als gültig hingestellt wird“. In analoger Weise wird die Konjunktion definiert. Die Definition der Negation lautet für den einfachsten Fall, daß der u. Satz $p = fa$ eine Eigenschaft f eines Gegenstandes a ausdrückt, wie folgt: Ist G die Gesamtheit der mit f unverträglichen Eigenschaften, so bedeutet $\sim fa$ die Disjunktion aller Sätze ga , wo g zu G gehört. — Ein abgeleiteter Satz ist eine Disjunktion von Konjunktionen von u. Sätzen; die Definitionen der Disjunktion, der Konjunktion und der Negation werden in naheliegender Weise auf abgeleitete Sätze ausgedehnt, wobei sich immer wieder abgeleitete Sätze derselben Art ergeben. Nun gilt allgemein der Satz vom Widerspruch, aber nicht allgemein der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, denn sind p_1, p_2, \dots die mit p un-

verträglichen u. Sätze, so beruht die Annahme, daß sich immer einer der Sätze p, p_1, p_2, \dots begründen lasse, auf einer metaphysischen Voraussetzung, die Verf. nicht anerkennt. — Obgleich Verf. ausdrücklich unendliche Gesamtheiten von u. Sätzen zuläßt, geht er auf die Schwierigkeiten, welche diese bereiten können, nicht ein; so behauptet er, daß die Sätze einer Gesamtheit entweder alle gelten oder einer von ihnen nicht gilt.

A. Heyting (Enschede).

Geschichtliches.

● **Euklid: Die Elemente.** Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt u. hrsg. v. Clemens Thaer. **TL. 3.** (Buch 7—9.) (Ostwalds Klassiker. Nr. 240.) Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1935. VI, 80 S. RM. 3.60.

Es handelt sich hier um die arithmetischen Bücher, denen der Übersetzer wieder erläuternde Anmerkungen und Literaturhinweise beigibt (8 Seiten). Für **TL. 1 und 2** s. dies. **Zbl. 7, 49.**

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Candido, G.: Sulle proposizioni 125^a e 126^a di Pappo. *Period. Mat.*, IV. s. 15, 286—289 (1935).

● **Datta, Bibhutibhusan, and Avadhesh Narayan Singh: History of Hindu mathematics. A source book. Pt. I. Numeral notation and arithmetic.** Lahore: Motilal Banarsi Das 1935. XX, 261 pag. 10/6.

Dieser erste Teil behandelt die Geschichte der Zahlzeichen und der elementaren Rechenoperationen, der zweite soll die Algebra, der dritte Geometrie und Zahlentheorie enthalten. Es wird also hier das erstmal eine Gesamtgeschichte der indischen Mathematik geboten, und schon dies allein wird dem Werk einen wichtigen Platz in der Literatur einräumen. Im vorliegenden Teil ist insbesondere das erste Kapitel („Numeral Notation“) von Wichtigkeit. Die Verf. führen eine Reihe von Tatsachen an, die es wahrscheinlich machen, daß die dezimale Stellenwertbezeichnung (die sicherlich ihren Ausgangspunkt in Indien hat) bereits um — 200 entstanden sein dürfte und nicht erst, wie bisher angenommen, im 7. Jahrh. n. Chr. Im zweiten Kapitel („Arithmetic“) werden die einzelnen Rechenverfahren geschildert und Anwendungen (z. B. auf Zinsenrechnung) besprochen. Für die Zeit v. Chr. wählen die Verf. Datierungen, die sehr erheblich von den üblichen Ansätzen abweichen; ebenso sind manche allgemeine Behauptungen, z. B. über die ägyptischen Zahlbezeichnungen, unrichtig, was aber für die eigentlichen Zwecke des Buches nebensächlich ist.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

● **Kugler, Franz Xaver, S. J.: Sternkunde und Sterndienst in Babel. Assyriologische, astronomische und astralmithologische Untersuchungen. 3. Erg.-H. z. 1. u. 2. Buch v. Johann Schaumberger, C. Ss. R. Münster i. W.: Aschendorffsche Verlagsbuchh. 1935. VIII, 152 S. u. 17 Taf. RM. 24.—**

Es handelt sich hier weniger um Nachträge, als um eine Weiterführung von Kuglers Arbeiten zur babylonischen Astronomie. Die erste Abteilung (S. 243—356) enthält eine große Anzahl von Einzelergebnissen, die aber für alle weiteren einschlägigen Untersuchungen von großer Bedeutung sein werden, z. B. durch die Identifizierung oder bessere Abgrenzung von Sternbildern, Klärung verschiedener Termini der Astrologie oder Beobachtungstechnik usw. Insbesondere sei darauf hingewiesen, daß die bisher übliche Abgrenzung der drei „Himmelswege“ (eine Äquatorzone und zwei Polkappen) falsch ist, da sie auf einem Fehlschluß basiert war, den Verf. hier in Ordnung bringt. Die zweite Abteilung (S. 357—394) enthält außer einer Reihe von Ergänzungen zu von Kugler behandelten Texten vor allem die Aufklärung des zweiten Teils von Kidinnus Mondtheorie aus dem berühmten Text „SH 272“. Es ist dem Verf. gelungen, die äußerst sinnreiche Methode klarzulegen, durch die in diesen Kolonnen Eintrittszeit und Dauer von Neulicht bzw. Altlicht berechnet werden. Es wird auseinandergesetzt, wie für die Zeitdauer zwischen Konjunktion und Neulichtabend die Entfernung von Sonne und Mond aus den bekannten Geschwindigkeitsfunktionen bestimmt werden, wie aus Hilfskolonnen die aus Breitenbewegung des Mondes und Längendifferenz folgenden Korrekturen berücksichtigt werden, zu denen noch beim Neulicht eine Korrektur zur Berücksichtigung der Dämmerung hinzukommt. Zwei weitere Kolonnen geben dann die Sichtbarkeitsdauer von Neu- und Altlicht. Die Aufklärung dieses besonders schwierigen Teiles der babylonischen Mondtheorie bildet wohl die wichtigste Leistung seit Eppings und Kuglers Arbeiten und beseitigt eines der störendsten Hindernisse in der Interpretation der theoretisch-astronomischen Texte. — Für Einzelheiten muß auf eine ausführliche Besprechung verwiesen werden, die in den Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math. B 3 erscheinen wird. Das Werk schließt mit 16 Tafeln Autographen, darunter der von SH 272. Ein weiteres Ergänzungsheft befindet sich in Vorbereitung.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

● Caspar, Max: *Johannes Keplers wissenschaftliche und philosophische Stellung.* (Schriften d. Corona. H. 13.) München u. Berlin: R. Oldenbourg u. Zürich: Verl. d. Corona 1935. 37 S. RM. 1.50.

Schilderung von Keplers Persönlichkeit und Weltauffassung. Es wird besonders betont, wie sehr Kepler seine ganze Arbeit als Beitrag zu philosophischen Fragen auffaßt, wie er insbes. seine astronomischen Entdeckungen als Entdeckung kosmischer Harmonien wertet.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

● Ramsauer, Rembert: *Die Atomistik des Daniel Sennert. Ansatz zu einer deutsch-artig-schauenden Naturforschung und Theorie der Materie im 17. Jahrhundert.* Kiel: Diss. 1935 u. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1935. VIII, 123 S. RM. 6.—

Inhaltsübersicht: I. Entstehung des modernen naturw. Denkens in d. Renaissance. II. Biographisches. III. S.s Atomistik. IV. Würdigung. V. Einfluß auf Spätere. Die in Kap. III an Hand vieler Zitate geschilderte Lehre S.s wird als „von der mechanistisch-rationalistischen, durch Gassendi erneuerten demokritisch-epikureischen Atomtheorie völlig verschieden“ gekennzeichnet. Im Schlußabschnitt („Robert Boyle u. d. Unterdrückung d. deutschartigen Atomismus D. S.s“) wird geschildert, daß „trotz allen Wohlwollens, das B. für S. zeigt“, sich bei B. „eine völlige Verständnislosigkeit für S.s Naturschau“ zeigt (S. 91), wenn er z. B. sagt, „es ist nicht einfach, solche alltägliche Namen [Edelheit einer Form] richtig auf physikalische Dinge anzuwenden und zu bestimmen, ob die folgende Form edler oder weniger edel ist als die vorhergehende“ (S. 90).

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Stamm, Edward: *Mathématiques au XVII^e siècle en Pologne.* Wiadom. mat. 40, I—V u. 1—216 (1935) [Polnisch].

Algebra und Zahlentheorie.

● Comptes-rendues du premier congrès international de récréation mathématique, Bruxelles, 3.—8. VIII. 1935. Bruxelles: Libr. Sphinx 1935. 131 pag. Belgas 10.—

Pólya, Georges: *Un problème combinatoire général sur les groupes de permutations et le calcul du nombre des isomères des composés organiques.* C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1167—1169 (1935).

Soit un groupe H d'ordre h permutant p éléments donnés. Soit $H_{j_1 j_2 \dots j_p}$ le nombre des permutations de H formées de j_1 cycles de 1 élément, j_2 cycles de 2 éléments, etc. Substituons aux p éléments p figures prises dans un nombre indéterminé de figures différentes, qui contiennent trois espèces d'objets, rouges, bleus et blancs. Deux telles configurations seront dites équivalentes mod H s'il existe une permutation de H qui effectuée sur l'une d'elles, la rend identique à l'autre. — On cherche le nombre A_{klm} des configurations non-équivalentes mod H qui contiennent k rouges, l bleus et m blancs. L'auteur trouve la fonction génératrice $\sum A_{klm} x^k y^l z^m = F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{h} \sum H_{j_1 j_2 \dots j_p} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_p^{j_p},$$

dans laquelle la somme est étendue à tous les systèmes j_1, j_2, \dots, j_p et $f_i = f(x^i, y^i, z^i)$, $f(x, y, z)$ étant $\sum a_{klm} x^k y^l z^m$ où a_{klm} est le nombre des figures à disposition qui contiennent k rouges, l bleus et m blancs. — La formule a un très grand nombre d'applications à l'étude des symétries et en particulier au calcul du nombre des isomères des composés organiques.

S. Bays (Fribourg).

Darbi, Giulio: *Riducibilità e gruppi delle equazioni algebriche in cui la variabile è x^m .* Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 73, 9—24 (1935).

Damit eine Gleichung $x^{mn} + \alpha_1 x^{m(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1} x^m + \alpha_n = 0$ reduzibel sei, während die Gleichung $y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} y + \alpha_n = 0$ irreduzibel ist, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß entweder y die p -te Potenz einer Zahl des Körpers $K(y)$ oder [im Falle $m \equiv 0 \pmod{4}$] — 4 y die 4-te Potenz einer Zahl von $K(y)$ ist [Capelli, Giorn. Mat. Battaglini 42 (1904)], wobei p ein Primteiler von m ist. — Drückt man eine Wurzel z der Gleichung $z^p = y$ rational durch y aus: $z = a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n$, und stellt für z die irreduzible Gleichung n -ten Grades auf: $z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n = 0$, so kann man leicht die

Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der ursprünglichen Gleichung als Funktionen der Parameter b_1, b_2, \dots, b_n darstellen. — Verf. stellt die expliziten Ausdrücke von α_i durch b_i in Determinantenform auf. Sodann wendet er seine Überlegungen auf die Fälle $n = 2$ und $m = 2$ an. Im letzteren Falle erhält der Verf. für die α_i Graeffsche Parameterdarstellungen $\alpha_1 = 2b_2 - b_1^2, \alpha_2 = b_2^2 + 2b_4 - 2b_1b_3, \dots$, aus welchen er einige Kongruenzeigenschaften folgert: Ist z. B. $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{4}, \alpha_2 \equiv 1 \pmod{2}$, so muß die Gleichung in x irreduzibel sein. — Zum Schluß beweist der Verf., daß die Ordnung der Galoisschen Gruppe der Gleichung in x ein Teiler des Produktes $m^n \cdot r \cdot \mu$ ist, wobei r der Grad der im Koeffizientenkörper K irreduziblen Gleichung ist, der

$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ genügt, während μ die Ordnung der Galoisschen Gruppe der Gleichung in y bedeutet, wenn man als Rationalitätsbereich $K(\varepsilon)$ nimmt. *N. Tschebotaröw.*

Toscano, Letterio: Una equazione a matrice circolante. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 293–296 (1935).

Wittmeyer, Helmut: Einfluß der Änderung einer Matrix auf die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems, sowie auf die charakteristischen Zahlen und die Eigenvektoren. Darmstadt: Diss. 1935. 44 S.

Die auf Anregung Wegners entstandene Arbeit beschäftigt sich mit Abschätzungen für die charakteristischen Zahlen λ gegebener Matrizen. — Für das durch die lineare Vektortransformation A entstehende Streckungsverhältnis s werden die Schranken gegeben: $\min \lambda(\bar{A}'A) \leq s^2 \leq \max \lambda(\bar{A}'A)$, was geometrisch einfach gedeutet wird. Daraus folgen Abschätzungen nach oben und unten für die $\lambda(A+B)$ und $\lambda(A+B)$:

$$\max \lambda((\bar{A}+B)'(A+B)) \leq \max \lambda(\bar{A}'A) + \max \lambda(\bar{B}'B),$$

$$\max |\lambda(A+B)|^2 \leq \max \lambda(\bar{A}'A) + \max \lambda(\bar{B}'B).$$

[Für die min gelten die umgekehrten Ungleichungen] bzw.

$$\max \sqrt{\lambda((\bar{A}+B)'(A+B))} \leq \max \sqrt{\lambda(\bar{A}'A)} + \max \sqrt{\lambda(\bar{B}'B)},$$

$$\max |\lambda(A+B)| \leq \max \sqrt{\lambda(\bar{A}'A)} + \max \sqrt{\lambda(\bar{B}'B)}.$$

[Ähnlich für die min.] — Im Hauptteil wird der Einfluß der Änderung von A auf die Lösung des zugehörigen Glgs.-Systems und auf die λ und Eigenvektoren untersucht. Die beiden „benachbarten“ Glgs.-Systeme seien $A\bar{x} = r, (A+B)\bar{x}^* = r + \bar{s}$.

Dann findet Verf., daß $|\bar{x} - \bar{x}^*| \cdot \left[\sqrt{\min \lambda(\bar{A}'A)} - \sqrt{\max \lambda(\bar{B}'B)} \right] \leq s + r \frac{\max \sqrt{\lambda(\bar{B}'B)}}{\min \sqrt{\lambda(\bar{A}'A)}}$,

ein Hauptresultat der Arbeit, das nicht nur genauer ist als frühere Abschätzungen in der Literatur, sondern das auch kaum verbesserungsfähig sein dürfte. Ähnlich wird für die absolute Differenz der stationären Werte zweier „benachbarten“ reellen quadratischen Ausdrücke eine Abschätzung gegeben. Als weiteres Hauptergebnis der Arbeit folgt, daß, wenn A und $C = A + B$ normal sind (d. h. $\bar{A}'A = A\bar{A}'$ usw.), die λ sich so numerieren lassen, daß $|\lambda_i(A) - \lambda_i(C)|^2 \leq \max \lambda(\bar{B}'B)$, eine Unglg., mit der sich die maximale Änderung der Eigenfrequenzen eines Systems von gekoppelten Massenpunkten bei Änderung der Koppelung abschätzen läßt. Es folgen Sätze über die Eigenvektoren benachbarter Matrizen. Damit wird bewiesen, daß die zu $\lambda(A)$ gehörigen Eigenvektoren nicht sämtlich zu einem zu $\lambda^*(A+B)$ gehörigen Eigenvektor \bar{x}^* unitär-orthogonal sind. — Das letzte sachliche Kapitel enthält Abschätzungen für die $\lambda(A)$ nach unten, die einer unveröffentlichten Arbeit Wegners entnommen sind, und nach oben, z. B. $S^{n-1} \cdot \min \lambda \bar{\lambda} \geq (n-1)^{n-1} |A\bar{A}|$, wo $S = \sum_{i,k} |a_{ik}|^2$, eine Abschätzung, die weniger genau ist als eine andere. Ferner $\min |\lambda| \geq \min (|a_{ii}| - \sum_{k \neq i} |a_{ik}|)$ für alle i , und $\min |\lambda| \geq \min |a_{ii}| - \sqrt{\sum_{i \neq k} |a_{ik}|^2}$, die

aber beide nur für Matrizen mit überwiegender Hauptdiagonale Bedeutung haben. Die Abschätzungen nach oben von I. Schur (Math. Ann. 66) und Hirsch (Acta math. 25) werden durch i. allg. bessere ersetzt. — Zum Schluß werden die Resultate angewandt zur handlichen Beurteilung der Güte der Näherungslösung eines linearen Glgs.-Systems. Andere Anwendungen werden für später in Aussicht gestellt.

Bodewig (Basel).

Haantjes, J.: Klassifikation der antilinearen Transformationen. Math. Ann. 112, 98—106 (1935).

Eine antilineare Transformation P in E_n ist dadurch definiert, daß sie einem Vektor u mit Komponenten u^i einen Vektor v zuordnet, dessen Komponenten v^i linear von den konjugiert-komplexen Komponenten \bar{u}^i abhängen. Das Quadrat einer antilinearen Transf. ist eine lineare Transf. Q , deren charakteristische Wurzeln reell oder in Paaren konjugiert-komplex sind. Es werden nun Normalformen angegeben, auf die alle antilin. Transf. durch passende Basiswahl im Vektorraum reduziert werden können. Die Normalformen zerfallen in Kästchen, die je einer Wurzel oder einem Paar komplexer Wurzeln von Q entsprechen. Im Fall einer negativen Wurzel μ oder eines Wurzelpaares μ, μ haben die Kästchen gerade Ordnung und 0 in der Hauptdiagonale, während direkt unter der Hauptdiagonale eine Reihe Einser und direkt darüber eine Reihe $\mu \ 0 \ \mu \ 0 \dots \mu$ steht. Im Fall einer nichtnegativen reellen Wurzel $\mu = \nu^2$ steht in der Hauptdiagonale überall ν , darunter eine Reihe Einser wie bei der Jordanschen Normalform der lin. Transf. van der Waerden (Leipzig).

Cherubino, Salvatore: Sopra un teorema particolare e sui due fondamentali nella teoria delle matrici. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 230—234 (1935).

By repeated differentiation of the equation $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^* = f(\lambda) \cdot I$ where A^* denotes the adjoint of A and $|A - \lambda I| = f(\lambda)$, the author obtains proofs of several known theorems, including the Hamilton-Cayley theorem and the theorem of Frobenius on the determination of the minimum function. MacDuffee (Madison).

Kwal, Bernard: Sur la représentation matricielle des quaternions. Bull. Sci. math., II. s. 59, 328—332 (1935).

Bekanntlich lassen sich die Quaternionen auf eine und nur eine Art durch zweireihige Matrizes darstellen, wobei man aber die imaginäre Einheit i in die Ausdrücke aufnehmen muß. Eine reelle Darstellung durch Matrizes ist erst möglich, wenn man auf Matrizes mit vier Zeilen und vier Spalten übergeht. Es wird bewiesen, daß es zwei Systeme solcher Matrizes gibt. L. Schrutka (Wien).

Nakayama, Tada: Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörpers. Math. Ann. 112, 85—91 (1935).

K sei separabel galoissch über k mit der Gruppe \mathfrak{G} . Für ein Faktorensystem $a_{R,S}$ von K/k liegen die den Elementen R von \mathfrak{G} zugeordneten Produkte $F(R; (a)) = \prod_{S \subset \mathfrak{G}} a_{R,S}$ im

Grundkörper k , wie sich durch Multiplikation der Assoziativrelation $a_{R,ST} a_{S,T} = a_{R,S} a_{T,R}$ über S ergibt. Es wird nun die Gruppe $N_{K/k}^*$ der von Null verschiedenen Normen von K -Elementen in Beziehung auf k eingeführt und die Restklasse $F(R; (a)) N_{K/k}^*$ mit $\mathfrak{F}(R; (a))$ bezeichnet. $\mathfrak{F}(R; (a))$ fällt für assoziierte Faktorensysteme a gleich aus, ist also eine Funktion von R und der Klasse von a . Ferner gilt der Satz: $R \rightarrow \mathfrak{F}(R; (a))$ ist ein Homomorphismus von \mathfrak{G} auf eine Untergruppe der Normklassengruppe $k^*/N_{K/k}^*$, bei dem die Kommutatorgruppe \mathfrak{G}' von \mathfrak{G} auf 1 abgebildet wird. — Für abelsches \mathfrak{G} wird gezeigt, daß dieser Homomorphismus sogar ein Isomorphismus ist, wenn der Exponent des verschränkten Produktes (a, K, \mathfrak{G}) gleich $(K:k)$ ist. In einem nachträglichen Zusatz wird bemerkt, daß nach Y. Akizuki allgemein diese Abbildung ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ ist, wenn (a, K, \mathfrak{G}) den Exponenten $(K:k)$ hat. Wenn man diesen Isomorphiesatz auf p -adische Algebren anwendet, so erhält man unmittelbar den Isomorphiesatz der Klassenkörpertheorie im kleinen: $\mathfrak{G} \cong k^*/N_{K/k}^*$ für abelsches K/k . Es wird dann noch ein Ausdruck für das Normenrestsymbol $\left(\frac{\beta, k}{p}\right)$ bei

abelschem K über p -adischem k hergeleitet: Hat (a, K, \mathfrak{G}) die Invariante $-\mu/(K:k)$ (mod 1) und liegt β in $\mathfrak{F}(S; (a))$, so ist $\left(\frac{\beta, k}{p}\right) = S^a$. Die Übertragung auf endliche algebraische Zahlkörper ist leicht.
Deuring (Leipzig).

Nakayama, Tadaki: Über die Algebren über einem Körper von Primzahlcharakteristik. Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 305—306 (1935).

K sei ein Körper der Primzahlcharakteristik p . Es wird bewiesen: Eine normale einfache Algebra \mathfrak{A} über K mit p -Potenzindex hat stets über K vollständig inseparable Zerfällungskörper. Für vollkommenes K muß also $\mathfrak{A} \sim 1$ sein, was schon von Albert in Trans. Amer. Math. Soc. 36, 388—394 (1934), dies. Zbl. 9, 195 bewiesen wurde. Wenn weiter der Grad des Wurzelkörpers $K^{1/p}$ über K den endlichen Wert p^n hat, so ist die n -te Potenz des Exponenten von \mathfrak{A} durch den Index von \mathfrak{A} teilbar. Ist sogar $(K^{1/p}:K) = p$, so stimmen also Exponent und Index überein, und in diesem Falle hat die zu \mathfrak{A} ähnliche Divisionsalgebra vollständig inseparable maximale Teilkörper. Zum Beweis wird ein zu \mathfrak{A} ähnliches verschränktes Produkt $(a, L/K, \mathfrak{G})$ betrachtet, das wegen der bekannten Existenz separabler Zerfällungskörper immer vorhanden ist. Man zeigt leicht, daß aus der Ähnlichkeit $\mathfrak{A} \sim (a, L/K, \mathfrak{G})$ durch Grundkörpererweiterung die Ähnlichkeit $\mathfrak{A}_{K^{1/p}} \sim (a, L^{1/p}/K^{1/p}, \mathfrak{G})$ folgt. Der Isomorphismus zwischen L und $L^{1/p}$ kann unmittelbar zu dem Isomorphismus $(a, L^{1/p}/K^{1/p}, \mathfrak{G}) \cong (a^p, L/K, \mathfrak{G})$ erweitert werden. Also haben $\mathfrak{A}_{K^{1/p}}$ und \mathfrak{A}^p , allgemeiner $\mathfrak{A}_{K^{1/p^i}}$ und \mathfrak{A}^{p^i} gleiche Indizes und gleiche Exponenten. Alle aufgestellten Behauptungen lassen sich daraus mit Leichtigkeit ableiten.
Deuring (Leipzig).

Albert, A. Adrian: Involutionary simple algebras and real Riemann matrices. Ann. of Math., II. s. 36, 886—964 (1935).

I. Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Als Hilfsmittel für die folgende Theorie wird festgestellt: Gilt der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz in irgendeinem Körper \mathfrak{F} , so gilt er auch in jedem Erweiterungskörper \mathfrak{K} , der durch endlich viele algebraische oder transzendente Adjunktionen aus \mathfrak{F} entsteht. Die Verallgemeinerung gegenüber dem nach W. Franz Bekannten besteht in der Einbeziehung auch inseparabler algebraischer Adjunktionen. — II. Involutionäre einfache Algebren. Sei \mathfrak{F} ein beliebiger Körper (ohne Einschränkung aus dem Primkörper durch endlich viele Adjunktionen entstehend), \mathfrak{A} eine einfache Algebra über \mathfrak{F} mit Zentrum \mathfrak{K} , so heißt \mathfrak{A} involutorisch, wenn eine Involution J , d. h. ein Antiautomorphismus der Ordnung 2, von $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ existiert, und zwar von erster oder zweiter Art, je nachdem \mathfrak{K} bei J elementweise invariant ist oder \mathfrak{K} über dem bei J elementweise invarianten Teilkörper \mathfrak{K}_0 den Grad 2 mit J als erzeugendem Automorphismus hat. \mathfrak{A} ist dann und nur dann involutorisch von erster Art, wenn \mathfrak{A} den Exponenten 2 hat, und von zweiter Art, wenn \mathfrak{A} zu einer Algebra eines der beiden folgenden Typen A, B ähnlich ist: Typus A. Z_0 zu \mathfrak{K} fremde galoissche Erweiterung von \mathfrak{K}_0 ; $Z = \mathfrak{K}Z_0$; $\mathfrak{A} \sim (a, Z)$, wo das Faktorensystem $a_{s,t}$ der Zerfallsbedingung $N_{Z/\mathfrak{K}_0}(a_{s,t}) = \frac{c_s^p c_t}{c_{st}}$ genügt. Typus B. \mathfrak{F} vom Transzendenzgrad 1 über einem

Primkörper von Primzahlcharakteristik; Z absolut-algebraische (zyklische) Erweiterung von \mathfrak{K}_0 von geradem Grade $2n$; \mathfrak{K} der Teilkörper von Z vom Grade 2 über \mathfrak{K}_0 ; $\mathfrak{A} \sim (\gamma, Z, S)$, wo das Faktorensystem γ der Zerfallsbedingung $N_{\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0}(\gamma) = N_{\mathfrak{K}/\mathfrak{K}_0}(c)$ genügt. Für den Fall, daß \mathfrak{F} algebraischer Zahlkörper ist, kann nach der feineren Strukturtheorie der Algebren Z auch im Typus A zyklisch und überdies von gleichem Grad wie \mathfrak{A} über \mathfrak{K} angenommen werden, so daß also dann \mathfrak{A} selbst von zyklischem Typus A ist. — III. Die Multiplikationsalgebra einer Weylschen Matrix. Sei Γ_0 ein reell-abgeschlossener Körper und $\Gamma = \Gamma_0(i)$ mit $i^2 = -1$ der zugehörige algebraisch-abgeschlossene Körper, ferner \mathfrak{F} ein beim Automorphismus $\gamma \rightarrow \bar{\gamma}$ von Γ/Γ_0 als Ganzes invarianter Teilkörper von Γ und C eine Matrix aus \mathfrak{F} mit $\bar{C} = \pm C$. Dann heißt eine Matrix R aus Γ eine definite Weylsche Matrix zur Grundmatrix C über \mathfrak{F} , wenn die Matrix $\tau = RC$ hermitisch positiv-definit ist. Siehe dazu mein Referat über die Arbeit von H. Weyl, dies. Zbl. 10, 100f. Die Gesamtheit der mit R vertauschbaren Matrizen \mathfrak{A} aus \mathfrak{F} bildet die Multiplikationsalgebra \mathfrak{A} von R . (Für die einfachsten Struktursätze legt Verf. zunächst einen noch allgemeineren Begriff der Weylschen Matrix zugrunde und zeigt insbesondere, daß die Zulassung von Primzahlcharakteristik nur zu trivialen Multiplikationsalgebren führt.) Die Multiplikationsalgebra \mathfrak{A} ist involutorisch, mit $A' = \bar{C}A'C^{-1}$. Ist R irreduzibel, so ist \mathfrak{A} Divisionsalgebra; der allgemeine Fall reduziert sich darauf durch Aufspaltung in irreduzible Bestandteile. Ist \mathfrak{A} von zweiter Art, so kommt im obigen Typus A die Bedingung hinzu, daß die Zerfallsgrößen c_s total-positiv wählbar sind; eine ganz entsprechende Bedingung gilt für die erste Art. Diese Bedingungen erweisen sich auch als hin-

reichend dafür, daß eine involutorische Divisionsalgebra als Multiplikationsalgebra einer irreduziblen Weylschen Matrix auftritt. — IV. Reelle Riemannsche Matrizen. Sei \mathfrak{F} reell ($\leq \Gamma_0$), ω eine Riemannsche Matrix (von p Zeilen, $2p$ Spalten) über \mathfrak{F} zur Grundmatrix C mit $C' = -C$ und R die zugehörige Weylsche Matrix (von $2p$ Zeilen und Spalten); siehe dazu mein oben angeführtes Referat. R ist dann reell und $R^2 = -I_{2p}$. Verf. zeigt, daß diese Bedingungen für die Weylsche Matrix R auch hinreichend dafür sind, daß R aus einer Riemannschen Matrix ω über \mathfrak{F} entspringt. Hauptgegenstand des letzten Teils der Arbeit ist die Strukturtheorie der Multiplikationsalgebra einer „reellen“ Riemannschen Matrix ω , d. h. einer solchen, für die die Beziehung $\lambda\omega = \bar{\omega}\lambda$ eine Lösung L in \mathfrak{F} mit $L^2 = I_{2p}$ hat. Für die zugehörige Multiplikationsalgebra \mathfrak{A} werden durch Zurückführung auf Weylsche Matrizen die sämtlichen möglichen Typen bestimmt. Insbesondere wird gezeigt, daß zu diesen Typen für \mathfrak{A} auch wirklich „reelle“ Riemannsche Matrizen existieren. Eine Aufzählung im einzelnen dieser Typen würde hier zu weit führen.

Hasse (Göttingen).

Spampinato, Nicolò: Sulla geometria dello spazio rigato considerato come un S_1 ipercomplesso. Atti Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, II. s. 20, Nr 11, 1—25 (1935).

L'Auteur considère l'ensemble A des matrices carrées d'ordre 2 à éléments complexes (algèbre régulière complexe d'ordre 4) et appelle caractéristique d'un couple (x_1, x_2) d'éléments de A le rang de la matrice à quatre lignes et deux colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Il appelle enfin S_1 hypercomplexe lié à l'algèbre A tout ensemble d'éléments de A de caractéristique 2 définis à un facteur près à droite de déterminant non nul. On a la proposition suivante: l'espace S_3 réglé est un S_1 hypercomplexe lié à l'algèbre A . Différentes applications montrent que la représentation d'une droite au moyen des coordonnées (x_1, x_2) est particulièrement maniable. P. Dubreil (Nancy).

Scorza, Gaetano: Le algebre del 3.º ordine. Atti Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, II. s. 20, Nr 13, 1—14 (1935).

Classification des algèbres d'ordre 3 (c. à. d. de rang 3) sur un corps quelconque: l'Auteur indique les différents types possibles (au nombre de 27), définit chacun d'eux par le tableau de multiplication des éléments de base, et en étudie les propriétés.

P. Dubreil (Nancy).

Scorza, Gaetano: Le algebre del 4.º ordine. Atti Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, II. s. 20, Nr 14, 1—83 (1935).

Ce Mémoire est consacré à la classification des algèbres d'ordre 4 sur un corps quelconque Γ : l'Auteur indique encore les différents types possibles (au nombre de 128, distincts par rapport à la relation d'équivalence), chacun de ces types étant défini par son tableau de multiplication et caractérisé par ses principales propriétés. Dans le cas où le corps est complexe et l'algèbre douée de module, les résultats de l'Auteur concordent avec ceux obtenus autrefois par Study dans les mêmes hypothèses (Über Systeme komplexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppe. Mh. Math. Phys. 1890, 283—355): voir à ce sujet la conclusion du Mémoire de Scorza. Plus récemment, R. B. Allen a considéré le cas où Γ est un sous-corps du corps complexe (On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality. Trans. Amer. Math. Soc. 9, 203—218) et K. S. Ghent a étudié les algèbres d'ordre 4 pseudonulles [A note on nilpotent algebras in four units. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 331—338 (1934); ce Zbl. 9, 243]. Dans l'introduction de son Mémoire, Scorza fait la critique des résultats d'Allen et de Ghent, qui ne se sont pas préoccupés de montrer que les types par eux rencontrés sont distincts et épuisent tous les types possibles. Voir aussi, sur les algèbres d'ordre 4 douées de module, une Note de C. Carbonaro, Boll. Acc. Gioenia, Catania, fasc. 68, ser. 2a (1935). Dubreil.

Carbonaro, Carmela: Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3.º ordine dotate di modulo. Atti Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, II. s. 20, Nr 16, 1—22 (1935).

N. Spampinato, dans un Mémoire devant paraître prochainement (Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad n unità dotata di modulo, v. ce Zbl. 9, 119) attache à toute algèbre complexe douée de module un groupe d'affinités et une transformation de Cremona, et les détermine pour les algèbres

de rang 2 (I gruppi di affinità e di trasformazioni quadratiche legati alla due algebre complesse doppie dotate di modulo, Boll. Acc. Gioenia, également à l'impression). Dans le présent Travail, C. Carbonaro effectue la même détermination pour les 5 algèbres de rang 3 complexes et douées de module: les transformations de Cremona sont quadratiques pour deux de ces algèbres, cubiques pour les autres. *P. Dubreil.*

Zahlentheorie:

Lubelski, S.: Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie. Acta Arithmet. 1, 169—183 (1935) u. Prace mat.-fiz. 43, 207—221 (1936).

Im § 1 beweist der Verf. auf elementarem Wege folgenden Satz: Jedes Trinom $ax^2 + bx + c$, wo a, b, c ganzzahlig und $d = b^2 - 4ac$ keine negative Quadratzahl ist, hat unendlich viele Primteiler $q \equiv -1 \pmod{4}$. Dabei existiert unterhalb \sqrt{D} mindestens eine solche Zahl q . Ebenda beweist er, daß jedes nichtzyklische irreduzible Kreisteilungspolynom modulo jeder Primzahl reduzibel ist, was übrigens unmittelbar aus dem Dedekindschen Satze folgt. — Im § 2 beweist der Verf. den Dedekindschen Satz über die Grade der modulo p irreduziblen Faktoren eines Polynoms mit der bekannten Galoisschen Gruppe und leitet daraus einige neue Folgerungen her. Unter diesen Folgerungen sind diejenigen besonders bemerkenswert, die sich auf folgenden gruppentheoretischen Satz stützen: Eine einfach transitive Permutationsgruppe n -ten Grades ist dann und nur dann in der alternierenden Gruppe n -ten Grades enthalten, wenn ihre 2-Sylowgruppe nichtzyklisch ist. Daraus folgt insbesondere der Pellet-Stickelberger-Voronoische Satz über den Wert von $\left(\frac{D}{p}\right)$, wo D die Körperdiskriminante bedeutet. — Im § 3 benutzt der Verf. analytische Hilfsmittel, insbesondere den Frobeniusschen Dichtigkeitssatz. Hier verallgemeinert er einen Wegnerschen Satz [Math. Ann. 105 (1931); dies. Zbl. 2, 245] folgendermaßen: Hat ein Polynom modulo fast jeder Primzahl mindestens v Linearfaktoren, so enthält es mindestens v rationale Faktoren. — Zum Schluß wird ein interessanter Satz bewiesen: Damit fast alle Primfaktoren eines Polynoms $f(x)$ die Form $q \equiv 1 \pmod{4}$ haben, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ in der Form $f_1^2(x) + f_2^2(x)$ darstellbar ist, wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ rationale Polynome sind.

N. Tschebotarow (Kasan).

Weisner, Louis: Abstract theory of inversion of finite series. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 474—484 (1935).

Der Zweck dieser Arbeit ist, das Dedekindsche Umkehrungsverfahren: Aus $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ folgt $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$, auf allgemeinere Mengen an Stelle der natürlichen Zahlenfolge $1, 2, \dots, n$ zu erweitern. Verf. führt 6 Axiome ein, denen die Relation „hierarchy“ (in Zeichen: x/y) zwischen den Elementen x, y, \dots einer Menge genügen soll: 1. Reflexivität: x/x . — 2. „Asymmetrizität“: aus x/y und y/x folgt $x = y$. — 3. Transitivität: aus x/y und y/z folgt x/z . — 4. Existenz für jedes Elementenpaar des „größten gemeinsamen Teilers“ (wenn man die Relation x/y liest: x ist Teiler von y). — 5. Existenz des „größten gemeinsamen Multiplums“. — 6. Es gibt nur eine endliche Anzahl von Elementen x , die den Relationen $a/x/b$ bei festen a, b genügen. — Man sieht leicht, daß solche Relationen umkehrbar (dual) sind, d. h. daß das Zeichen $x \setminus y$ (gleichbedeutend mit y/x) denselben Axiomen genügt. — Sodann führt der Verf. die Bezeichnung $Q_k(x_1/x_2)$ ein für die Anzahl von Systemen aus k verschiedenen Elementen, deren jedes Teiler von x_2 ist und die x_1 als g. g. T. haben. Die durch die Formeln

$\mu(x/x) = 1, \mu(x_1/x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Q_k(x_1/x_2)$ definierte verallgemeinerte Möbiussche

Funktion $\mu(x_1/x_2)$ genügt den Relationen $\sum_{x_1/d/x_2} \mu(d/x_2) = \begin{cases} 1 & \text{bei } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{bei } x_1 \neq x_2, \end{cases}$ woraus die gesuchte Umkehrungsformel folgt: Aus $g(x/a) = \sum_{x/d/a} f(d/a)$ folgt $f(x/a) = \sum_{x/d/a} \mu(x/d) g(d/a)$.

— Insbesondere wendet der Verf. diese Formel auf die Menge der Untergruppen einer endlichen Gruppe an und bekommt auf diese Weise einen gruppentheoretischen Satz.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Weisner, Louis: Some properties of prime-power groups. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 485—492 (1935).

Verf. wendet die in der vorangehenden Arbeit (vgl. das vorangeh. Ref.) abgeleitete Umkehrungsformel an auf die Bestimmung der Untergruppen verschiedener Art von p -Gruppen (Gruppen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist). Unter den Resultaten dieser Arbeit sind folgende zu beachten: Die Anzahl von Untergruppen von der Ordnung p^s einer Gruppe von der Ordnung p^g , die eine bestimmte Untergruppe enthalten, ist immer $\equiv 1 \pmod{p}$. — Sollen die gegebene und die gesuchte Gruppe nichtzyklisch und ihre vorgegebene gemeinsame Untergruppe zyklisch sein, so ist die Anzahl der gesuchten Untergruppen $\equiv 1 \pmod{p}$. N. Tschebotaröw.

Fistié, G.: Au sujet de nombres cycliques. Mathesis **49**, Nr 9, Suppl., 1—20 (1935).

Elementare Eigenschaften der Perioden von Dezimalbrüchen. Z. B.: Ist p eine Primzahl, N die von den n Ziffern der Periode von $1:p$ gebildete Zahl, $10^n \equiv 1 \pmod{p^2}$, N' die von den np Ziffern der Periode von $1:p^2$ gebildete Zahl, $N = pv + r$, $0 < r < p$, so ist $N' - r = \sum_{i=0}^{p-1} (v + irN) 10^{n(p-i-1)}$. Verf. gibt heuristische Beweise; die exakten sind jedoch sehr einfach. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Gupta, Hansraj: On G -functions in general. Math. Student **3**, 50—55 (1935). Certain generalizations of $G(n, r)$ in the identity

$$(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n) \equiv \sum_{r=0}^n \{G(n, r) x^{n-r}\}$$

are so defined as to be useful in investigating the so-called Ward's Numbers.

R. D. Carmichael (Urbana).

Chowla, S.: Irrational indefinite quadratic forms. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **2**, 176—177 (1935).

The relation $|p_n/q_n - (c_1/c_2)^{1/2}| < 1/(a_n q_n^2)$ for the continued fraction for $(c_1/c_2)^{1/2}$ is considered, and the following theorem obtained. If c_1, c_2 are positive and $(c_1/c_2)^{1/2}$ is irrational, and the quotients a_n of the continued fraction for $(c_1/c_2)^{1/2}$ are unbounded, then for any $\varepsilon > 0$ there exist infinitely many non-zero integers x, y such that

$$|c_1 x^2 - c_2 y^2| < \varepsilon.$$

See also this Zbl. **10**, 8.

G. Pall (Montreal).

Mahler, Kurt: Über den größten Primteiler der Polynome $X^2 \mp 1$. Arch. Math. og Naturvid. **41**, Nr 1, 1—8 (1935).

The theorems proved are

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_1(x)}{\log \log x} \geq 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_2(x)}{\log \log x} \geq 2,$$

where $P_1(x)$ and $P_2(x)$ are the greatest prime factors of $x^2 - 1$ and $x^2 + 1$ respectively. Reference is made to results of Carl Störmer on those values x , for which $x^2 \mp 1$ contain only certain primes p_1, \dots, p_t , being given by the fundamental solution of $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, as D ranges over the non-square values $p_1^{\varepsilon_1} \dots p_t^{\varepsilon_t}$ ($\varepsilon_i = 0, 1, 2$) (Videnskapselskabets Skrifter, I. Mathem.-naturvid. Klasse **1897**). For the fundamental solution T, U the bound $\log(T + U\sqrt{D}) \leq 2\sqrt{D} \log(8D)$ is derived and employed. G. Pall (Montreal).

Besicovitch, A. S.: On the density of the sum of two sequences of integers. J. London Math. Soc. **10**, 246—248 (1935).

The Khintchine density $d(a)$ of a sequence a_1, a_2, \dots of positive integers is defined to be the lower bound of $x^{-1} \sum_{a_i \leq x} 1$ for $x = 1, 2, \dots$, and the modified density $d'(a)$

to be the lower bound of $(x+1)^{-1} \sum_{a_i \equiv x} 1$. Given two sequences $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, let $\{c_i\}$ be the sequence consisting of all numbers a_i and all numbers which are representable as $a_i + b_j$. Then the author proves that $d(c) \geq d(a) + d'(b)$. The result is interesting in view of the theorem of Khintchine (see this Zbl. 6, 155). *Davenport* (Cambridge).

Perron, Oskar: A remark on Minkowski's theorem about linear forms. *J. London Math. Soc.* **10**, 275—276 (1935).

Es seien

$$L_\nu(x) = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + \dots + a_{\nu n} x_n \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

n Linearformen mit reellen Koeffizienten und der Determinante ± 1 ; nach dem klassischen Satz von Minkowski haben die n Ungleichungen

$$|L_\nu(x)| \leq 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

eine Lösung in ganzen nicht sämtlich verschwindenden Zahlen x_1, \dots, x_n . Es gilt der Zusatz: Wenn es keine Lösung des Systems (1) gibt, bei dem das Zeichen $<$ in allen n Ungleichungen statthält, so gibt es eine (und übrigens auch nur eine) Lösung, für die

$$L_1(x) = 1, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} < L_\nu(x) \leq \frac{1}{2} \quad (\nu = 2, 3, \dots, n). \quad (3)$$

Für diesen Zusatz, der kürzlich von R. Rado [*J. London Math. Soc.* **10**, 115 (1935); s. dies. Zbl. **11**, 247] nur im Falle rationaler Koeffizienten der Linearformen und in der schwächeren Form mit

$$|L_\nu(x)| \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

an Stelle von (3) bewiesen wurde, gibt Verf. einen Beweis mittels des zahlengeometrischen Ansatzes von Minkowski. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Siegel, Carl Ludwig: Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem. *Acta math.* **65**, 307—323 (1935).

Es sei \mathfrak{R} ein zum Nullpunkt \mathfrak{o} symmetrischer konvexer Körper im n -dimensionalen Raume \mathfrak{R} ; V sein Volumen. Enthält \mathfrak{R} nur den einzigen Gp. (= Gitterpunkt) \mathfrak{o} , so sagen wir, daß der Fall M vorliegt. — Ist $\varphi(\mathfrak{x})$ quadratisch integrierbar und $\varphi = 0$ außerhalb \mathfrak{R} , so ist (§ 1)

$$\sum_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}} \varphi(\mathfrak{x}) \varphi(\mathfrak{x} - 2\mathfrak{x}) d\mathfrak{x} = 2^{-n} \sum_{\mathfrak{x} \in \mathfrak{R}} |\int \varphi(\mathfrak{x}) e^{-\pi i \mathfrak{x}} d\mathfrak{x}|^2 \quad (1)$$

($\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $d\mathfrak{x} = dx_1 \dots dx_n$; $\mathfrak{x} = l_1 x_1 + \dots + l_n x_n$), wo $\mathfrak{x}, \mathfrak{l}$ alle Gp. durchlaufen. Im Falle M bleibt links nur das Glied $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; wird noch $\varphi = 1$ in \mathfrak{R} gesetzt, so folgt im Falle M aus (1)

$$V = 2^{-n} (V^2 + \sum_{\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}} |\int e^{-\pi i \mathfrak{x}} d\mathfrak{x}|^2), \quad (2)$$

woraus insbes. die Minkowskische Ungleichung $V \leq 2^n$ folgt. — Von nun an (§ 2) sei \mathfrak{R} ein Ellipsoid mit der Gleichung $P(\mathfrak{x}) = \sum a_{ik} x_i x_k = 1$. Die Integrale in (2) lassen sich nun durch Besselsche Funktionen ausdrücken, führen aber zu keiner bequemen Abschätzung. Eine solche erhält man aber aus (1) (mit $\varphi = 1$ in \mathfrak{R}), wenn man folgende Bemerkung benutzt: Ist $\sqrt{P(\mathfrak{x})} > \frac{2}{3}$ für jeden Gp. $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, so sind je zwei in \mathfrak{R} gelegene Gp. mod 3 inkongruent, also ihre Anzahl $\leq 3^n$. Es ergibt sich: Im

Falle M ist $V < (4/3)^n 2^{2^n}$ für große n ; eine noch bessere Schranke, wie Verf. betont, stammt von Blichfeldt. — Eine Verallgemeinerung des im § 1 benutzten Ansatzes führt im § 3 zu einem Extremalproblem, dessen Formulierung (nach einigen leichten Umformungen) und Lösung folgendermaßen lautet: \mathfrak{R} sei die Einheitskugel; τ sei die untere Grenze von $J(h) = \int_{\mathfrak{R}} h(\mathfrak{y}) d\mathfrak{y}$ für alle nichtnegativen $h(\mathfrak{y})$ mit $h(\mathfrak{o}) = 1$, welche in der Form

$$h(\mathfrak{y}) = \int_{\mathfrak{R}} \psi(\mathfrak{x}) e^{-2\pi i \mathfrak{x} \mathfrak{y}} d\mathfrak{x}$$

darstellbar sind, wo ψ in \mathfrak{R} stetig ist und nur von $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ abhängt (daher ist $h(\mathfrak{y})$ eine ganze Funktion von $(y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$). Es ist dann $\tau = 2^n : V$, und es

gibt genau eine (leicht durch Besselsche Funktionen darstellbare) Funktion h mit $J(h) = \tau$. — Daraus ergibt sich im § 4 folgender Satz: Es sei $n > 0$ ganz, $f(z)$ ganz, reell für reelles z , $f(0) = 1$, $f(z) = O(\exp \varrho |z|)$ für jedes $\varrho > 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |x|^{n-1} dx \leq 2^{2n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right);$$

dann hat $f(z)$ eine reelle Nullstelle; und die Schranke rechts ist scharf. *Jarník.*

Vinogradov, I. M.: On approximation to zero with help of numbers of certain general form. Rec. math. Moscou 42, 149—155 (1935).

Verf. gibt eine Abschätzung für das Minimum der Form $|\alpha uv - \beta - m|$, wo u und v Folgen allgemeiner Natur durchlaufen. Diese kann als Verallgemeinerung eines Satzes des Verf. (vgl. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 1—5 oder dies. Zbl. 11, 296) angesehen werden. Verf. weist auch auf andere Anwendungen hin. *Lubelski.*

● **Koksma, J. F.: Diophantische Approximationen.** (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 4, H. 4.) Berlin: Julius Springer 1936. VIII, 157 S. RM 18,40.

Wie aus dem Literaturverzeichnis, das 29 Seiten umfaßt und ungefähr 900 Bücher und Artikel vermeldet, auf das deutlichste hervorgeht, gibt Verf. eine vollständige Übersicht über die gesamte Theorie der diophantischen Approximationen. Nicht nur die älteren Autoren wie Dirichlet und Kronecker werden behandelt, sondern alle Artikel dieses Gebiets, selbst bis zu den allerneuesten, sind im Literaturverzeichnis aufgenommen und im Buch verarbeitet worden. Dort, wo die Beweise nicht zu lang und besonders kennzeichnend für die Methode sind, werden sie wiedergegeben, aber das Hauptziel des Verf. bleibt eine zwar vollständige, aber kurze und doch deutliche Übersicht über alle bis heute gewonnenen Ergebnisse. Dies ist ihm nach meiner Meinung denn auch vollständig geglückt. — Als Hauptprobleme der Lehre der diophantischen Approximationen werden die folgenden drei an die Spitze gestellt. — A 1. Zu gegebenen Funktionen $F_\nu = F_\nu(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ ($\nu = 1, \dots, n$) möglichst kleine positive Funktionen $\varphi_\nu(t)$ anzugeben, so daß das Ungleichungssystem

$$|F_\nu(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)| < \varphi_\nu(X) \quad (\nu = 1, \dots, n), \quad (1)$$

wo $X = \max_{\mu=1, \dots, m} |x_\mu|$ ist, unendlich viele ganzzahlige Lösungen $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ besitzt. — A 2. Zu den gegebenen F_ν möglichst kleine positive Funktionen $\varphi_\nu(t)$ und $\psi(t)$ anzugeben, so daß für alle großen t (eventuell nur: für eine Folge positiver $t \rightarrow \infty$) das System

$$|F_\nu(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)| < \varphi_\nu(t) \quad (\nu = 1, \dots, n); \quad 1 \leq X \leq \psi(t)$$

eine ganzzahlige Lösung besitzt. — B. Zu den F_ν möglichst große Funktionen $\varphi_\nu(t)$ anzugeben, so daß das System (1) nur höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen hat. — Als Übersicht über den Inhalt des Buches stelle ich hier die Titel der Kapitel und der Paragraphen zusammen. — I. Einleitung. 1. Allgemeine Fassung der Hauptprobleme. 2. Der lineare Fall. 3. Bemerkungen zu einigen Methoden. 4. Der allgemeine Fall. II. Die Geometrie der Zahlen. Systeme linearer Formen. 1. Die Minkowskische Geometrie der Zahlen. 2. Der Minkowskische Linearformensatz. 3. Der Minkowskische Satz über inhomogene Linearformen. 4. Systeme linearer Formen. 5. Die Blichfeldtsche Methode in der Geometrie der Zahlen. 6. Summen von Potenzen linearer Formen. Positiv-definite quadratische Formen. III. Der homogene lineare Fall (I): Der eindimensionale homogene lineare Fall und die Kettenbrüche. 1. Die regelmäßigen Kettenbrüche. 2. Die Markoff-Hurwitzsche Methode. Die Funktion $M(\theta)$. 3. Die Borelsche Methode. Verallgemeinerungen des Hurwitzschen Satzes. Die Aufgabe A 2. 4. Die Folgen ξ_i und Verwandtes. Geometrische Methoden. 5. Mengentheoretisches (metrische Sätze). IV. Der homogene lineare Fall (II): Irrationalität und Transzendenz. 1. Kettenbruchähnliche Algorithmen. Approximationen in komplexen und anderen Zahlkörpern. 2. Irrationalitätsuntersuchungen. 3. Das Irrationalitätsmaß. Anwendung auf diophantische Gleichungen. 4. Transzendenzuntersuchungen. V. Der homogene lineare Fall (III): Zahlensystem und Näherungsform. 1. Das Khintchinesische Übertragungsprinzip. 2. Die Aufgabe A 2. 3. Simultane Approximationen. VI. Der eindimensionale inhomogene lineare Fall. 1. Vorbemerkungen. 2. Klassische Approximationssätze und Verschärfungen. 3. Die Aufgabe A 2. VII. Der n -dimensionale inhomogene lineare Fall. 1. Inhomogene und homogene Form. 2. Der Kronecker'sche Approximationssatz. VIII. Asymptotische Verteilung reeller Zahlen (mod. 1). 1. Verteilungsfunktionen (mod. 1). 2. Die allgemeine Definition der Gleichverteilung (mod. 1). 3. Das Weylsche Kriterium für die Gleichverteilung (mod. 1). 4. Die elementare Methode Vinogradoffs und die van der Corput'sche Verschärfung. 5. Das Analogon zum Weylschen Kriterium bei anderen Verteilungsfunktionen (mod. 1). IX. Abschätzungen des Fehlergliedes und ver-

wandter Größen. 1. Vertiefung des Weylschen Ansatzes. Polynome vom Grade $k \geq 2$. Ein allgemeiner Satz. 2. Polynome ersten Grades (der lineare Fall). 3. Polynome zweiten Grades. 4. Summen und Reihen, die denen der Paragraphen 2 und 3 verwandt sind. 5. Trigonometrische Summen. 6. Metrische Sätze über die Gleichverteilung gewisser Folgen. Asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen. X. Diophantische Ungleichungen. 1. Anwendung der Gleichverteilungsmethoden. 2. Eine elementare Skolemsche Methode. 3. Die van der Corputsche Theorie der rhythmischen Funktionensysteme. — Das sehr nützliche Buch schließt mit einem Sachregister, das den Gebrauch noch erleichtert. Für jeden, der sich für dieses Gebiet interessiert, wird das Buch unentbehrlich sein.

van der Corput (Groningen).

Analysis.

● Schmidt, Harry: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung. Leipzig: Max Jänecké 1935. VIII, 125 S. u. 20 Abb. RM. 5.80.

Die besondere Tendenz dieses Buches, das sich in der Stoffauswahl (Vektoralgebra, Vektoranalysis, Elemente der Tensorrechnung) wenig von der Mehrzahl der kleineren, für den Physiker bestimmten Lehrbücher unterscheidet, charakterisiert der Verf. im Vorwort folgendermaßen: „... diese Schrift ... möchte lediglich eine zuverlässige, sachlich völlig einwandfreie Einführung in ihren Gegenstand für Anfänger vermitteln, ohne sich auf faule Kompromisse einzulassen, um leichte Lesbarkeit zu erzwingen.“ Dieses Bestreben des Verf. äußert sich naturgemäß am stärksten in der Vektoranalysis. Statt beispielsweise Scheinbeweise für die Integralsätze zu geben, übernimmt Verf. diese und einige andere Sätze ohne Beweis in einer Form, in der sie in einer Reihe von Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung einwandfrei bewiesen werden. Auf begriffliche Schwierigkeiten wird ausführlich eingegangen. Doch scheinen dem Ref. die endgültigen Formulierungen der Definitionen eines Vektors (S. 26) und eines Tensors (S. 105—106) mißverständlich. Die Definition der Massendichte in einem Punkt (S. 45) ist nicht korrekt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Baidaff, B. I., und J. Barral Souto: 5 interessante Werte eines allgemeinen Mittelwertes. Bol. mat. 7, 102—104 (1934) [Spanisch].

Baidaff, B. I., und J. Barral Souto: Studie über den Differentialquotienten eines allgemeinen Mittelwertes. Bol. mat. 8, 81—83 (1935) [Spanisch].

Die Verff. betrachten die Potenzmittelwerte

$$y(x) = \left(\sum p_r a_r^x \right)^{1/x}, \quad p_r \geq 0, \quad \sum p_r = 1,$$

als Funktionen von x . Insbesondere beweisen sie durch Abschätzen der Ableitung $y'(x)$ die geläufige Tatsache, daß $y(x)$ monoton wächst.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Münzner, Hans: Über Verschärfungen der Tsebebycheffschen Ungleichung. Skand. Aktuarie Tidskr. 18, 279—287 (1935).

Pocklington, H. C.: An inequality. J. London Math. Soc. 10, 242—243 (1935).

The results are (I) if a, k, p are positive, $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ positive and non-increasing, $\sum_1^n x_r y_r \geq a^p$, and $\sum_1^n x_r \leq ka$, then either $\sum_1^n x_r \geq a$ or $\sum_1^n y_r \geq a^{p-1}$ for $s \geq k$; (II) if $p \geq 2$ and $\sum_1^n x_r^p \geq a^p$, $\sum_1^n x_r \leq ka$, then $\sum_1^n x_r \geq a$ for $s \geq k$.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Herschfeld, Aaron: On infinite radicals. Amer. Math. Monthly 42, 419—429 (1935).

Es sei $a_n \geq 0$; die „rechtsseitige Wurzeliteration“ $\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$ ist konvergent oder divergent, je nachdem

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log a_n}{n} \leq \log 2$$

($\log \log a_n = -\infty$ für $a_n \leq 1$). Dieses Kriterium von Pólya [Arch. d. Math. (3) 24, 84 (1916)] wird in dem Falle $\alpha = \log 2$ dadurch ergänzt, daß dann die notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz

$$\lim (\log \log a_n - n \log 2) < +\infty$$

ist. Weiter wird die Stärke der Konvergenz abgeschätzt und an Beispielen erläutert.

Die „linksseitige Wurzeliteration“ $\sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1} + \dots + \sqrt{a_1}}}$, $a_n \geq 0$, $a_n \neq 0$, konvergiert dann und nur dann, wenn $a_n \rightarrow a$. Der Grenzwert ist $= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a})$.
G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Watson, G. N.: Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale. Čas. mat. fys. 65, 1—7 (1935).

Eine von K. Petr 1915 angegebene Entwicklung eines bestimmten Integrales wird bewiesen; für das auftretende Restglied werden geeignete Reihen entwickelt.

F. Rehbock (Bonn).

Stożek, Włodzimierz: Über den Inhalt einer auf der Kugel liegenden geschlossenen Kurve. Prace mat.-fiz. 43, 237—240 (1936).

Aus einer potentialtheoretischen Formel von Gauß läßt sich durch einen Grenzübergang die folgende (natürlich auch elementar leicht beweisbare) Formel für den Flächeninhalt P eines Gebietes auf der Einheitskugel herleiten, das von einer stückweise stetig differentiierbaren, einfach geschlossenen Kurve C berandet wird:

$$P = \int_C \frac{\cos(e, n)}{1 + \cos(e, OM)} ds.$$

Hierbei ist s die Bogenlänge und $M = M(s)$ ein variabler Punkt auf C , ferner O der Kugelmittelpunkt, e der Radius zu einem festen, im Gebiet gelegenen Punkt und n die in das Innere des Gebiets weisende, zur Kugel tangentielle Normale von C im Punkt M . [Verf. findet infolge eines Rechenfehlers $1 - \cos(e, OM)$ statt $1 + \cos(e, OM)$ im Nenner des Integranden.]
W. Fenchel (Kopenhagen).

Šamonil, Ferdinand: Sur la généralisation des certaines formules de sommation. Aktuár Vědy 5, 129—133 (1935).

Die von Tauber [Acta math. 57 (1931); dies. Zbl. 2, 387] gegebene Verallgemeinerung der Summenformeln von Laplace und Euler wird so umgeformt, daß sie auch eine Formel von Steffensen (Interpolation, S. 138ff. Baltimore 1927) als Spezialfall enthält.
W. Feller (Stockholm).

Kuzmin, R. O.: Sur la méthode de Tschebicheff pour l'évaluation approchée des intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1094—1095 (1935).

Tschebicheff a proposé la formule suivante

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^n f(x_m) \quad (1)$$

pour le calcul approché des intégrales, où les nombres x_m doivent être déterminés par la condition que la formule (1) soit exacte pour un polynome quelconque de degré n . S. Bernstein, après avoir montré que pour n assez grand tous les nombres x_m ne peuvent pas appartenir à l'intervalle $(-1, +1)$ (Bull. Acad. Sci. URSS 1932, 1219—1227; ce Zbl. 6, 399), a posé à l'endroit cité la question de déterminer la distribution asymptotique des x_m pour n très grand. L'auteur apporte une contribution considérable à la résolution de cette question, en démontrant que, S désignant l'aire limitée par la courbe fermée ayant pour équation

$$\int_{-1}^{+1} \log |z-t| dt = 2 \log 2 - 2, \quad (2)$$

tous les nombres x_m se trouvent, pour n suffisamment grand, à l'intérieur de toute aire S_1 donnée limitée par une courbe C qui entoure l'aire S sans avoir de points communs avec la courbe (2). La démonstration résulte de la forme

$$p_n(x) = e^{\frac{n}{2} \int_{-1}^{+1} \log(x-t) dt} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{n}{2} \int_{-1}^{+1} \log |z-t| dt}}{z-x} \sin \frac{\pi n(1-z)}{2} dz,$$

sous la quelle l'auteur présente pour toute valeur de x extérieure au segment $(-1, +1)$ le polynôme $p_n(x)$ ayant les nombres x_m pour racines, car, à l'extérieur de S_1 , le premier terme est beaucoup plus grand que le second. *S. Bernstein* (Leningrad).

Hoel, Paul G.: Certain problems in the theory of closest approximation. Amer. J. Math. 57, 891—901 (1935).

L'auteur étudie le problème de la détermination des coefficients c_i de la somme $\psi(x) = \sum_{i=1}^n c_i s_i(x)$, où $s_i(x)$ sont des fonctions données, par la condition de minimiser l'intégrale

$$\int_a^b w(x) |f(x) - \psi(x)|^m dx,$$

le poids $w(x) \geq 0$ et la fonction $f(x)$ étant donnée, en supposant $m > 0$ constant. L'auteur se place dans des conditions très générales, où $f(x)$ et $s_i(x)$ sont bornées et mesurables, aucune somme $\psi(x)$ à coefficients non tous nuls n'étant nulle sur un ensemble intérieur à (a, b) de mesure positive, et étend avec des modifications convenables les résultats concernant $m > 1$ au cas où $m \leq 1$. *S. Bernstein* (Leningrad).

Mirakyan, G.: Sur une nouvelle fonction qui s'écarte le moins possible de zéro. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 12, 41—47 (1935).

L'auteur étudie le problème suivant: le polynôme $t(x) > 0$ (pour $-1 \leq x \leq 1$) de degré r étant donné, ainsi que les coefficients réels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_l$, déterminer parmi les fonctions

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{t(x)}} \left[\sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_l x^{n-l} + p_{l+1} x^{n-l-1} + \dots + p_n + \frac{a_0 x^{l-1} + \dots + a_{l-1}}{q_0 x^l + \dots + q_l} \right]$$

dépendant de $n + l + 1$ coefficients arbitraires celle qui s'écarte le moins possible de zéro sur $(-1, +1)$. En supposant $2n - r \geq l + 1$, $n > l$, l'auteur donne un procédé général ramenant la solution du problème à une équation algébrique de degré $(l + 1)$. Il est regrettable que la lecture du travail n'est pas aisée à cause de son langage très défectueux. *S. Bernstein* (Leningrad).

Geronimus, J.: Sur quelques propriétés extrémales de polynômes dont les coefficients premiers sont donnés. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 12, 49—58 (1935).

L'auteur s'occupe de la recherche de la valeur minimale $L_{n,s}$ de l'intégrale

$$L(G) = \int_{-1}^{+1} |G(x)| dx, \quad (1)$$

où $G(x)$ est un polynôme de degré $\leq n$, lorsque

$$G(x) = [\sigma_0 x^s + \sigma_1 x^{s-1} + \dots + \sigma_s] x^{n-s} + P(x),$$

en supposant les coefficients $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$ donnés et le polynôme $P(x)$ de degré inférieur à $n - s$ indéterminé. Pour le cas de $s = 1$, le problème est complètement résolu, on a:

$$L_{n,1} = \frac{|\sigma_1|}{2^{n-1}} \quad \text{ou} \quad L_{n,1} = \frac{|\sigma_0|}{2^{n-1}} \left[1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right],$$

suivant que $|\sigma_1| \geq |\sigma_0|$ ou $|\sigma_1| \leq |\sigma_0|$. Pour s fini quelconque, en supposant que $n \rightarrow \infty$, les coefficients donnés étant du même ordre, on a $L_{n,s} \sim \frac{2}{\pi} M_{n,s}$, où $M_{n,s}$ désigne le minimum de (1), lorsque $G(x) \geq 0$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. *S. Bernstein*.

Břečka, M.: Über einige extremale Eigenschaften der vielfach monotonen und monotonen Polynome. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 12, 61—78 (1935).

Le travail contient la solution des problèmes suivants: 1° déterminer l'écart minimum dans l'intervalle $(-1, +1)$ du polynôme de degré n multiplement monotone d'ordre $h + 1$

$$y_n(x) = \sigma_0 x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \dots + \sigma_n,$$

lorsque σ_0 et σ_1 sont donnés; 2° déterminer asymptotiquement l'écart minimum correspondant, lorsque $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$ sont des nombres donnés du même ordre de grandeur, s étant fini et $n \rightarrow \infty$; 3° déterminer la valeur asymptotique de l'écart considéré, lorsqu'un des coefficients σ_i est donné (i est supposé fini). *S. Bernstein.*

Mises, R. v.: Über allgemeine Quadraturformeln. J. reine angew. Math. 174, 56—67 (1935).

Auf einem etwas elementarerem Wege als bei Wirtinger (Z. angew. Math. Mech. 13, 166; dies. Zbl. 6, 361) wird die Formel

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{\nu=1}^n A_\nu f(a_\nu) + \int_0^1 M_\mu(x) f^{(\mu)}(x) dx \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

hergeleitet, wobei $a_0 = 0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq a_{n+1} = 1$ beliebig sind, die A_ν den Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu^\mu A_\nu = \frac{1}{\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1)$$

genügen und die Funktionen $M_\mu(x)$ durch die Bedingungen

$$M_{\mu+1}(x) = - \int_0^x M_\mu(\xi) d\xi; \quad M_1(x) = -x + \sum_{k \leq \nu} A_k, \quad a_\nu < x < a_{\nu+1},$$

erklärt werden. Sobald die Stellen a_ν fixiert sind, ergeben sich A_ν und $M_\mu(x)$ zwangsläufig aus der identischen Gültigkeit der Quadraturformel in $f(x)$. — Eine große Anzahl von besonderen Formeln ergeben sich hieraus durch Spezialisierung von m und n sowie der Stellen a_ν . Eine weitere Formel

$$\int_0^1 f(x) dN_1(x) + \int_0^1 N_\mu(x) f^{(\mu)}(x) dx = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

enthält Stieltjessche Integrale; $N_1(x)$ ist hier eine Funktion von beschränkter Schwankung, welche die Bedingungen

$$N_1(0) = 0, \quad \int_0^1 x^\mu dN_1(x) = 0 \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1)$$

erfüllt, während $N_{\mu+1}$ aus N_μ wie früher hervorgeht. — Schließlich wird eine allgemeine Quadraturformel verwandter Art aufgestellt, welche Funktions- und Ableitungswerte in beliebiger Anzahl kombiniert. Die Eulersche Formel ergibt sich als Spezialfall. Abschätzungen der Restintegrale werden nicht vorgenommen. *Szegö.*

Tchakaloff, L.: Über den Gültigkeitsbereich einer Ungleichung von Darboux und ihrer Erweiterung, angewandt auf Polynome. Compositio Math. 2, 362—377 (1935).

Es sei k positiv ganz, $\psi(x)$ nicht abnehmend mit mindestens $n = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$ Wachstumsstellen. Unter einer Minimalmenge M_k wird eine Zahlenmenge (reell oder komplex) verstanden, so daß für jedes Polynom k -ten Grades $\varphi(x)$ die „Darboux'sche Ungleichung“

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) d\psi(x) \right| \leq |\varphi(\xi)| \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(x)$$

mit einem ξ aus M_k befriedigt werden kann; hierbei soll keiner Teilmenge von M_k die gleiche Eigenschaft zukommen. Verf. beweist: Eine Menge von $p < n$ Zahlen kann keine Minimalmenge M_k sein. Ist k ungerade, so gibt es genau ein M_k von n Zahlen, nämlich die n Nullstellen des zu $\psi(x)$ gehörigen orthogonalen Polynoms $\varphi_n(x)$ vom n -ten Grade. Ist k gerade, so gibt es unendlich viele solche Systeme von n Zahlen, nämlich die Nullstellen von $\varphi_n(x) + c\varphi_{n-1}(x)$ und nur diese, wobei c eine beliebige reelle Konstante bedeutet. Weiter werden spezielle Fälle, Beispiele und das trigonometrische Analogon des Problems behandelt. *G. Szegö (St. Louis, Mo.).*

Pleijel, Åke: Über asymptotische Reihenentwicklungen in der Operatorenrechnung. Z. angew. Math. Mech. 15, 300—304 (1935).

This paper gives a satisfactory discussion of asymptotic developments in the Heaviside operational calculus. The following assumptions are made upon the operator function $\varphi(p)$: (1) $\varphi(p)/p \rightarrow 0$ as $|p| \rightarrow \infty$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg p \leq \frac{3\pi}{2}$; (2) $\varphi(p)$ is analytic save, possibly, at a finite number of points; if a is one of these singular points $\varphi(p)$ has, near it, a development $\varphi(p) = (p-a)^\alpha \{a_0 + a_1(p-a)^k + a_2(p-a)^{2k} + \dots\}$ where $k > 0$ is rational and α is arbitrary; (3) the integral $\int_{\frac{p}{p}}^{ep_i} \varphi(p) dp$ evaluated over the semicircle $p = Re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ has a limit $2\pi i h(t)$ as $R \rightarrow \infty$. It is shown that if the development corresponding to that (or those) singularity (singularities) possessing the greatest real part is used it furnishes an asymptotic expansion for $h(t)$ valid for real positive values of t . If we make the additional hypothesis $\frac{\varphi(p)}{p} \rightarrow 0$ as $|p| \rightarrow \infty$, $-\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2}$ the method given is valid for negative, and also for complex, values of t .

Murnaghan (Baltimore).

Reihen:

Verblunsky, S.: On a class of perfect sets. Acta math. 65, 283—305 (1935).

A set P , situated in the interval $(0, 2\pi)$, is called a set of multiplicity, if there is a trigonometrical series converging to 0 outside P but not everywhere. Let P be a perfect set, and d_1, d_2, \dots the sequence of intervals contiguous to P . The set P may be constructed by subtracting consecutively the intervals d_1, d_2, \dots from $(0, 2\pi)$. When d_1, d_2, \dots, d_n have been subtracted, there remain certain closed intervals $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$, and from one of these, ϱ_i say, d_{n+1} is to be subtracted. Verblunsky shows that, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{\varrho_i} = 0$, then P is a set of multiplicity. This result was suggested as probable by Mlle Bary [Fundam. Math. 9 (1927), 62—115, esp. 62—63], who proved it under a certain additional hypothesis concerning the intervals d_{n+1} and ϱ_i .

A. Zygmund (Wilno).

Kac, M.: Une remarque sur les séries trigonométriques. Studia Math. 5, 99—102 (1935).

If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, the Fejér polynomials of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ are unbounded in every interval $a \leq x \leq b$.

A. Zygmund (Wilno).

Marcinkiewicz, J.: On the convergence of Fourier series. J. London Math. Soc. 10, 264—268 (1935).

Hardy and Littlewood have shown [J. London Math. Soc. 7 (1932); this Zbl. 5, 394] that, if the Fourier coefficients of a function $f \in L$ are $O(n^{-\delta})$ ($\delta > 0$), then the Fourier series of f is convergent at every point x where $(*) f(x+t) - f(x) = O\left(\frac{1}{(\log 1/|t|)}\right)$. The author shows that, if a function $f \in L$ satisfies the condition $(*)$ at every point x of a set E of positive measure, the Fourier series of f converges almost everywhere in E . It is stated without proof that the inequality $(*)$ cannot be replaced by anything less stringent.

A. Zygmund (Wilno).

Marcinkiewicz, J.: On Riemann's two methods of summation. J. London Math. Soc. 10, 268—272 (1935).

In his classical memoir on trigonometrical series, Riemann introduced the following two methods of summation of series. Let $a_1 + a_2 + \dots$ be a series, and s_n its n -th partial sum. Let us assume that the expressions

$$R_1(h) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \left(\frac{\sin \nu h}{\nu h} \right)^2, \quad R_2(h) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} s_{\nu} \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2 h}$$

are convergent in the neighbourhood of $h = 0$. If $R_i(h)$ tends to s , as $h \rightarrow 0$, we shall say that the series $a_1 + a_2 + \dots$ is summable R_i to sum s ($i = 1, 2$). Riemann proved that any series convergent to s is summable R_1 as well as R_2 to s (as regards summability R_2 , he considered the case $s = 0$ only). Marcinkiewicz solves the problem of the mutual relations of the methods R_1 and R_2 , showing that a series may be summable R_1 without being summable R_2 , or summable R_2 without being summable R_1 .

A. Zygmund (Wilno).

Szász, Otto: Convergence properties of Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 483—500 (1935).

Let A be the class of series $\sum_0^\infty c_n$ such that $\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 < k < \delta(n+1)} (s_{n+k} - s_n) \geq 0$, $s_n = \sum_0^n c_n$, while \bar{A} the class of series with $\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{0 < k < \delta(n+1)} (s_{n+k} - s_n) > -\infty$, $\delta > 0$ fixed. Let B (or \bar{B}) be the class of series for which $\sum (c_n - |c_n|) \in A$ (or $\in \bar{A}$).

The author proves the following results. (I) Let $\sum_1^\infty a_n r^n \cos \nu \theta$, $0 \leq r < 1$ represent a harmonic function, and let (i) $\sum a_n \in \bar{B}$. Then condition (ii) $\sum a_n r^n = O(1)$, $0 \leq r < 1$, implies (ii') $\sum_1^n a_n = O(1)$ as $n \rightarrow \infty$ and vice versa. If (i) and (ii) are assumed then (iii) $\sum a_n r^n \cos \nu \theta_0 = O(1)$ implies (iii') $\sum_1^n a_n \cos \nu \theta_0 = O(1)$, θ_0 fixed, and vice versa. Finally if, under conditions (i) and (ii), $\varphi(\theta) \sim \sum a_n \cos \nu \theta$ is a Fourier series and $\sum_1^n a_n \cos \nu \theta_0 = O(1)$ then $\int_0^h \{\varphi(\theta_0 + t) + \varphi(\theta_0 - t)\} dt = O(h)$ as $h \rightarrow 0$.

(II) Let $\sum a_n \in B$ and $\sum a_n r^n \rightarrow s$ as $r \rightarrow 1$, so that $\sum a_n = s$ (R. Schmidt). Let, for a fixed θ_0 , $\sum a_n r^n \cos \nu \theta_0 \rightarrow s(\theta_0)$ as $r \rightarrow 1$. Then $\sum a_n \cos \nu \theta_0 = s(\theta_0)$. If this last condition is satisfied and $\varphi(\theta) \sim \sum a_n \cos \nu \theta$ is a Fourier series then $(2h)^{-1} \int_0^h \{\varphi(\theta_0 + t) + \varphi(\theta_0 - t)\} dt \rightarrow s(\theta_0)$ as $h \rightarrow 0$.

(III) Let $\omega(\theta) \sim \sum b_n \sin \nu \theta$ be a Fourier series and $\sum b_n \in \bar{B}$. Let $\int_0^h \omega(t) dt = O(h)$ as $h \rightarrow 0$. Then $\sum_1^n b_n = O(n)$. If, in addition, $\sum b_n r^n \sin \nu \theta_0 = O(1)$, $0 \leq r < 1$ then $\sum_1^n b_n \sin \nu \theta_0 = O(1)$. Conversely, if $\sum_1^n b_n \sin \nu \theta_0 = O(1)$, then $\int_0^h \{\omega(\theta_0 + t) + \omega(\theta_0 - t)\} dt = O(h)$ as $h \rightarrow 0$.

(IV) Let $\sum b_n \in B$ and $2/h \int_0^h \omega(t) dt \rightarrow d$ as $h \rightarrow 0$. Then $1/n \sum_1^n \nu b_n \rightarrow d/\pi$ as $n \rightarrow \infty$. If, in addition, $\sum b_n r^n \sin \nu \theta_0 \rightarrow s(\theta_0)$ as $r \rightarrow 1$ then $\sum b_n \sin \nu \theta_0 = s(\theta_0)$. Conversely if the last condition is satisfied then $2/h \int_0^h \{\omega(\theta_0 + t) + \omega(\theta_0 - t)\} dt \rightarrow s(\theta_0)$ as $h \rightarrow 0$.

The author proves several lemmas of independent interest, of which we mention only one. Let $s_{n+k} - s_n \geq -p$, $1 \leq k < 1 + \mu(n+1)$ and $\left| \sum_1^\infty c_n r^n \right| \leq M$. Then

$$|s_n| < M(1 + 8e)(2 + \mu)/\mu + p(1 + 4e(2 + \mu)(1 + \mu)/\mu^2).$$

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Morgan, Gilbert Walter: On the new convergence criteria for Fourier series of Hardy and Littlewood. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 4, 373—382 (1935).

A series $\sum a_n$ is said to be (H) summable to s if

$$T(x) = [H(x)/2\pi]^{1/2} \sum_{m=-x}^\infty \exp[-\frac{1}{2} m^2 H(x)] s_{m+x} \rightarrow s \text{ as } x \rightarrow \infty$$

[Valiron, Rend. Circ. mat. Palermo 42, 267—284 (1917)]. In extending some recent work of Hardy and Littlewood (this Zbl. 8, 310, 464) the author proves the following

results. (I) If $H(x)$ is decreasing and $x^{-2} < H(x) < 1$ while $x^2 H(x)$ increases and the ratio $\frac{H(ax)}{H(x)}$, for a positive a , lies between positive bounds, and if $\sum a_n$ is (H) summable to s , while $a_n = o\{H(n)^{1/2}\}$, then $\sum a_n$ converges to s . (II) Let $f(t)$ be periodic (of period 2π), even and integrable, $f(t) \sim \sum a_n \cos nt$ and $f(0) = 0$. Let $\varphi(x)$ be positive and $\Phi(x) = \int_x^{\infty} \frac{du}{u\varphi(u)} \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$ and let $\varphi'(x)$ exist and be positive, while $x\varphi'(x)\log x = O(\varphi(x))$. Let, for some K , $\eta(x) = \Phi^{-1}[\Phi(x) - K]$ and $H(x)\eta^2(x) = O(1)$. Then, if $f(t) = o\{\varphi(1/t)^{-1}\}$, the series $\sum a_n$ is (H) summable to 0. (III) Under the conditions above, if $a_n = O(1/\eta(n))$ then the series $\sum a_n$ converges to 0. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Ramaswami, V.: Some Tauberian theorems on oscillation. *J. London Math. Soc.* **10**, 294—308 (1935).

Seien: S und s die Oszillationsgrenzen einer Folge s_n , L und l diejenigen des A -Verfahrens, M und m diejenigen des (C, ∞) -Verfahrens, d. h. $\lim_{r \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty}$ bzw. $\inf \sigma_n^{(r)} = M$ bzw. m , wo $\sigma_n^{(r)}$ die (C, r) -Summe der Folge s_n ist. Verf. untersucht, wann diese Oszillationsgrenzen einander gleich sind und zeigt: (Th. 2) Es ist $L = S$ und $l = s$, falls L und l endlich sind und $\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{n \leq n' \leq (1+\varepsilon)n} \{s_{n'} - s_n\} = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. (Dieser Satz folgt aber, sogar für allgemeinere Limitierungsverfahren, aus den Noten des Ref., dies. Zbl. **7**, 245; **11**, 398.) — Bemerkenswert ist der Zusammenhang zwischen dem A - und (C, ∞) -Verfahren: (Th. 1a und 1b) Es ist $L = M$, falls m endlich ist; $l = m$, falls M endlich ist. An Beispielen wird gezeigt, daß in diesen Sätzen die Voraussetzungen der Endlichkeit von m bzw. M durch keine geringere ersetzt werden können. *Karamata* (Zemun).

Littlewood, J. E.: Note on the preceding paper. *J. London Math. Soc.* **10**, 309 bis 310 (1935).

Mit den Bezeichnungen des vorsteh. Ref. kann von den beiden Sätzen: Th. T . Ist eine Folge A -limitierbar und $\sigma_n^{(r)} > O(1)$, $n \rightarrow \infty$, so ist sie auch (C, r) -limitierbar, Th. t . Ist eine Folge (C, ∞) -limitierbar, so ist sie für großes r auch (C, r) -limitierbar, der Satz t aus T (wegen $m \leq l \leq L \leq M$) unmittelbar, aber T aus t erst durch den Ramaswamischen Satz (Th. 1a) gefolgt werden. — Verf. bemerkt (zweifelnd), daß es von Interesse wäre, einen direkten, von der A -Limitierbarkeit freien Beweis des Satzes t zu geben, so daß, von diesem Satze ausgehend, über den Ramaswamischen Satz ein natürlicher Beweis des Satzes T zu erhalten wäre. *Karamata* (Zemun).

Lawrence, B. E.: The summability of double power series. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **40**, 321—335 (1935).

The chief result of the paper is an extension, to double series, of Fatou's well-known theorem on the convergence of power series. If the function $f(x, y)$, defined for $|x| < 1$, $|y| < 1$ by the series $\sum \sum a_{mn} x^m y^n$, is regular for $x = 1$, $y = 1$, and if

(I) $p_{mn} = \sum_{\nu=1}^n a_{m\nu} = o(1)$, (II) $q_{mn} = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu n} = o(1)$, (III) $a_{mn} = o(1)$ as $m + n \rightarrow \infty$,

then the sum by rows, the sum by columns, and the Pringsheim sum of $\sum \sum a_{mn}$ all exist and are equal to $f(1, 1)$. *A. Zygmund* (Wilno).

Burkill, J. C.: The Cesàro scales of summation and integration. *J. London Math. Soc.* **10**, 254—259 (1935).

The author treats the Cesàro summability problem for Fourier series as an example of the application of the Cesàro-Perron scale of integrability, introduced by him in a note in *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **39**, 541—552 (1935); this Zbl. **12**, 204. He demonstrates the theorem: Let $f(t)$ be $C_i P$ -integrable (where i is a positive integer) and periodic with period 2π and let $\varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\} \rightarrow O(C, j)$

as $t \rightarrow 0$. Then if $k > j \geq i + 1$, the Fourier series of $f(t)$ is summable (C, k) , for $t = x$, to the sum s . J. Ridder (Groningen).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Mandelbrojt, Szolem: Sur les droites \bar{J} et les points singuliers des fonctions représentées par les séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1091—1093 (1935).

Voranzeige einiger Sätze über die singulären Stellen und die horizontalen \bar{J} -Linien von Dirichletschen Reihen, die einige frühere Sätze von Mandelbrojt und Gergen (s. dies. Zbl. **1**, 22) verschärfen und einige bekannte Sätze von Ostrowski und Landau-Carlson als Spezialfälle enthalten. Vlad. Bernstein (Milano).

Ríos, Sixto: Über Reihen von Exponentialpolynomen und über die Überkonvergenz der Dirichletschen Reihen. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, 51—54 (1935) [Spanisch].

Voranzeige einiger Sätze, die die Existenz Dirichletscher Reihen behaupten, deren geeignete Abschnittsfolgen gegen eine vorgegebene analytische Funktion in ihrem ganzen Existenzbereiche konvergieren. Vlad. Bernstein (Milano).

Kovanko, A. S.: Sur quelques modes de convergence des suites de fonctions, à une variable réelle sur $(-\infty, +\infty)$. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk **1**, 148—153 (1935).

Im Anschluß an die Stepanoffschen Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen betrachtet Verf. folgende Konvergenzbegriffe für Funktionen $f(x)$ in $-\infty < x < \infty$: 1. Es sei E eine meßbare Menge, $\delta E(a, b)$ das durch $b - a$ dividierte Maß der in $a < x < b$ liegenden Teilmenge von E und $\delta_s^e E =$ obere Grenze $\delta E(a, a + e)$.
 $-\infty < a < \infty$

Eine Folge $f_n(x)$ von meßbaren Funktionen heißt konvergent „S en mesure“, falls bei beliebigen $\varepsilon > 0$ und $e > 0$ die Ungleichung $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle hinreichend großen n (und alle p) außer in einer Menge $E_{n,n+p}$ mit $\delta_s^e E_{n,n+p} < \varepsilon$ besteht.

2. Es sei $D_{S_\omega}^e[f(x), \varphi(x)] =$ obere Grenze $\frac{1}{e} \int_a^{a+e} |f(x) - \varphi(x)|^\omega dx$, wo $\omega \geq 1$. Die
 $-\infty < a < \infty$

Folge $f_n(x)$ heißt konvergent „ S_ω en moyenne“, falls bei beliebigen $\varepsilon > 0$ und $e > 0$ die Ungleichung $D_{S_\omega}^e[f_{n+p}, f_n] < \varepsilon$ für alle hinreichend großen n (und alle p) besteht. Die bewiesenen Sätze entsprechen bekannten Sätzen für Funktionen in einem endlichen Intervall. B. Jessen (Kopenhagen).

Turing, A. M.: Equivalence of left and right almost periodicity. J. London Math. Soc. **10**, 284—285 (1935).

Nach v. Neumann (vgl. dies. Zbl. **9**, 349) heißt eine auf einer Gruppe \mathfrak{G} definierte Funktion $f(x)$ rechts- bzw. linksfastperiodisch, wenn die Funktionenklasse $\{f(xh)\}$ bzw. $\{f(hx)\}$ (wo h alle Elemente von \mathfrak{G} durchläuft) kompakt ist, und fastperiodisch schlechthin, wenn sie sowohl rechts- wie linksfastperiodisch ist. Verf. beweist äußerst einfach, daß die beiden Begriffe in der Tat äquivalent sind. B. Jessen (Kopenhagen).

Winter, Aurel: Über die asymptotische Verteilung von fastperiodischen Funktionen mit linear unabhängigen Exponenten. Prace mat.-fiz. **43**, 55—62 (1936).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (vgl. dies. Zbl. **6**, 162; **7**, 157) beweist Verf., daß die sog. Verschiebungsfunktion $e(\tau) = e(\tau; f) =$ obere Grenze $|f(t+\tau) - f(t)|$
 $-\infty < t < \infty$
 einer fastperiodischen Funktion $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n(t - \delta_n)$ mit positiven a_n und linear unabhängigen λ_n eine asymptotische Verteilungsfunktion besitzt, die, genau wie die asymptotische Verteilungsfunktion von $f(t)$, beliebig oft differentiierbar ist; der Beweis wird auf Grund des Ausdrucks $e(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n |\sin(\frac{1}{2}\lambda_n\tau)|$ ganz ähnlich geführt.

Verallgemeinerung auf Funktionen, die im Weylschen Sinne fastperiodisch sind.

B. Jessen (Kopenhagen).

Differentialgleichungen:

Ascoli, G.: Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 234—243 (1935).

L'équation considérée est (1) $y'' + A(x)y = 0$, $A(x) > 0$, $x_0 \leq x < \infty$; $x_0, x_2, \dots, x_{2n}, \dots$ sont les zéros successifs de l'intégrale $y(x)$, x_1, x_3, \dots ceux de la dérivée $y'(x)$; m_i désigne une valeur moyenne $\sqrt{A(\xi_i)}$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. On doit à A. Kneser les égalités [J. reine angew. Math. 117 (1897)]:

$$\frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)} = (-1)^n \frac{m_2 m_4 \dots m_{2n}}{m_1 m_3 \dots m_{2n-1}}; \quad \frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} = (-1)^n \frac{m_2 m_4 \dots m_{2n}}{m_3 m_5 \dots m_{2n+1}}$$

L'aut. en déduit des conclusions plus précises que celles de Kneser, p.ex.: c) $A(x)$ étant monotone, $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \alpha^2 > 0$, on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} |y(x_{2n+1})| = l > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |y'(x_{2n})| = l' > 0$,

$l' = \alpha l$. d) Les conclusions de c) ont encore lieu si $\log A(x)$ est à variation bornée dans (x_0, ∞) . f) Les mêmes conclusions, s'il existe une suite indéfiniment croissante $\{\xi_n\}$, $\xi_{n+1} - \xi_n < \lambda$, telle que la somme des oscillations de $\log A(x)$ dans les intervalles (ξ_i, ξ_{i+1}) est finie. Pour l'équation $y'' + [A(x) + \eta(x)]y = 0$, $\eta(x)$ étant absolument intégrable dans (x_0, ∞) , l'aut. établit que ses intégrales sont bornées, si les intégrales de (1) le sont. W. Stepanoff (Moskau).

Montel, Paul: Sur quelques familles de fonctions harmoniques. Fundam. Math. 25, 388—407 (1935).

Verf. beweist hier eine Reihe von Eigenschaften der normalen Familien harmonischer Funktionen, die aus dem Poissonschen Integral gewonnen werden können. Die Resultate können in die Form von Schottky-Landau gebracht werden, und man erhält dann z. B. exakte Schranken für den Radius der größten Kugel, in der eine harmonische Funktion $a_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + a_n x^n + \dots$ mit gegebenen a_0, a_n dasselbe Vorzeichen behält. Schließlich wird ein Analogon zu dem Satz von Julia bewiesen. L. Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Randolph, John F.: Carathéodory measure and a generalization of the Gauss-Green lemma. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 531—548 (1935).

Der Ref. hat (Fundam. Math. 8) eine Theorie des Flächenmaßes und anschließend einen Beweis des Gauss-Greenschen Satzes für eine Klasse von beschränkten Gebieten G gegeben. Der Rand R mußte ein endliches Grosssches Flächenmaß $\Phi_0(R)$ besitzen und die Bedingung der „Normalität“ erfüllen. Falls dann eine gewisse Ausnahmsmenge $S \subset R$ sich auf die xy -Ebene in eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null projizierte, konnte eine Verallgemeinerung des Gauss-Greenschen Satzes in der Form

$$\iiint_G \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz = \iint_R F \dot{D} d\sigma$$

bewiesen werden, unter \dot{D} ein signiertes geometrisches Vergrößerungsverhältnis verstanden. Aus der obigen Voraussetzung entnimmt man die Folgerung (α) : $\dot{D} = 0$ fast überall in S . Der Verf. befolgt nun die Methode des Ref. und paßt sie dem Fall des linearen Carathéodoryschen Maßes (in der Ebene) an. Er erzielt Vereinfachungen durch Benutzung 1. der Hahnschen Modifikation des Carathéodoryschen fünften Maßaxioms der Regularität, 2. durch Beschränkung auf den Gauss-Greenschen Satz. Da nun weiter der Verf. die obige Folgerung (α) in eine Definition umändert, d. h. $D \stackrel{df}{=} 0$ in S setzt (wodurch aber der geometrische Sinn des Vergrößerungsverhältnisses verloren geht), braucht er folglich im Falle des Carathéodoryschen Maßes $L(R)$ nicht mehr die oben erwähnte Voraussetzung über die Projektion von S . Der Ref. bemerkt noch, daß man mittels seiner Fundamenta-Arbeit, insb. S. 29—32 (das Symbol Φ ist dort im Kap. II fast überall durch Φ_0 oder ähnliches zu ersetzen), ein ähnliches Ergebnis leicht sogar für das Grosssche Maß erzielen könnte. — Den wesentlichen Fortschritt

des Verf. sieht der Ref. in einigen Ergebnissen, die den Begriff der Normalität betreffen. Der Verf. leitet diesbezüglich ein Kriterium ab, wann eine Menge A für das Carathéodorysche Maß $L(A)$ normal ist, und gelangt auf Grund dessen zu dem überraschenden Ergebnis, daß Ränder R von einfach zusammenhängenden Gebieten normal sind, falls $L(R) < \infty$. *Schauder (Lwów).*

Giraud, Georges: Problèmes des types de Dirichlet et de Neumann dans certains cas où les données sont discontinues. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 925—928 (1935).

Ankündigung weiterer Resultate bezüglich der elliptischen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $Fu = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f$, falls die Koeffizienten a_{ik} einer verallgemeinerten Dirichletschen Bedingung genügen. Das Dirichletsche wie auch das Neumannsche Problem kann für solche Differentialgleichungen auch dann gelöst werden, wenn die Koeffizienten b_j, c und das freie Glied in der Umgebung einer endlichen Anzahl von höchstens $m-1$ dimensionalen Hyperflächen (m die Anzahl der unabhängigen Variablen) von einer vom Verf. genau bestimmten Ordnung unendlich werden. Eine vom Verf. früher angekündigte „a priori“-Abschätzung für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen wird dabei widerrufen (vgl. dies. Zbl. **10**, 113). *Schauder (Lwów).*

Germa, R. H. J.: Sur la méthode de Cauchy-Lipschitz et la dérivation de l'intégrale d'une équation différentielle normale considérée comme fonction des valeurs initiales x_0 et y_0 . Mathesis **49**, 272—280 (1935).

En partant de la formule ($f(x)$ continue, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$)

$$\lim_{\max(x_{i+1}-x_i) \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{n-1} \{1 \pm (x_{i+1} - x_i) f(x_i)\} = \exp \left\{ \pm \int_a^b f(x) dx \right\},$$

l'auteur démontre directement par le procédé de Cauchy-Lipschitz, $\psi(x, x_0, y_0) \equiv I(x)$ étant l'intégrale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ passant par le point (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} e^{I(x)} &= \lim_{\max(x_{i+1}-x_i) \rightarrow 0} e^{y_0} \prod_{i=0}^{n-1} \{1 + (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i)\}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = \lim \prod \{1 + (x_{i+1} - x_i) f'_y(x_i, y_i)\} \\ &= \exp \left\{ \int_{x_0}^x f'_y(t, \psi(t, x_0, y_0)) dt \right\}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = \lim \{ -f(x_0, y_0) \prod \{1 + (x_{i+1} - x_i) f'_y(x_i, y_i)\} \} \\ &= -f(x_0, y_0) \exp \left\{ \int_{x_0}^x f'_y(t, \psi(t, x_0, y_0)) dt \right\}. \end{aligned}$$

W. Stepanoff (Moskau).

Sobolev, S. L.: Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 291—294 (1935).

Soit donnée l'équation du type hyperbolique

$$Lu \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

(aux coefficients analytiques) avec les conditions initiales $u|_{t=0} = u^{(0)}, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^{(1)}$.

L'auteur envisage u comme une fonctionnelle dans un espace linéaire choisi d'une façon appropriée. L'opération L^* , adjointe à L , est définie encore et il s'ensuit que chaque opération linéaire sur les fonctions a une opération adjointe portant sur les fonctionnelles. A l'aide de l'opération adjointe la construction de la fonctionnelle u satisfaisant à l'équation $Lu = \varrho$ (ϱ étant une fonctionnelle donnée) se réduit aux opérations développées par l'auteur dans ses notes précédentes sur le problème de Cauchy (ce Zbl. **8**, 357). — Ces résultats vont être publiés encore plus en détail.

Janczewski (Leningrad).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Beltraminelli, Vitellia: Sulle equazioni integrali di Fredholm a nucleo simmetrico generalizzato. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 73, 33—48 (1935).

This paper works out in detail the rather obvious and well known extension of the Hilbert-Schmidt theory of integral equations of the second kind for the case in which the kernel is Hermitian: $K(x, y) = \overline{K}(y, x)$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Krein, Mark: Sur les vibrations propres des tiges dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 12, 3—10 (1935).

L'auteur donne quelques applications nouvelles des noyaux de Kellogg (suite d'un mémoire précédent — ce Zbl. 12, 168). Il démontre par ex. que la fonction d'influence de la tige, dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre (resp. l'une encastrée et l'autre élastiquement appuyée) — est un noyau de Kellogg.

Janczewski (Leningrad).

Dantzig, D. van: La notion de dérivée d'une fonctionnelle. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1008—1010 (1935).

Sei $f(x)$ eine in einem endlichen Intervall erklärte Funktion, $F[f]$ ein Funktional bei veränderlichem $f(x)$. Nach Volterra wird durch

$$F'[f, \xi] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{F[f + \eta_\nu] - F[f]}{\xi + k_\nu} \quad (1)$$

$$\int_{\xi - k_\nu}^{\xi + k_\nu} \eta_\nu dx$$

die Ableitung von F für f im Punkte ξ erklärt. Hier ist $k_\nu \rightarrow 0$, $\text{Max} |\eta_\nu| \rightarrow 0$, wobei noch $\eta_\nu(x) = 0$ für $|x - \xi| \geq k_\nu$. Diese Definition der Ableitung hat gewisse Nachteile, von denen die folgenden hervorzuheben sind: a) Sie ist nicht invariant gegenüber topologischen Abbildungen des Intervalls der x . b) Schon das einfachste Funktional $F[f] = f(x_0)$ besitzt keine Ableitung im Sinne von Volterra. Verf. definiert nun eine invariante Ableitung. Diese Ableitung ist nicht mehr eine „Funktion“ des Punktes ξ [vgl. (1)]. Sie ist — was Verf. hervorhebt — eine additive Mengenfunktion $F'[f, E]$ in bezug auf die Punktmenge E der ξ . Die in Betracht kommenden Funktionen f sind stetige Funktionen $y = f(x)$, wobei x eine kompakte Menge M von endlicher Dimension durchläuft (y soll wahrscheinlich reell sein). Diese invariante Ableitung existiert immer, wenn die Volterrasse existiert. Für lineare Funktionale $L(f)$ hat man nach F. Riesz bekanntlich $L(f) = \int_M f(x) l_{\mathcal{L}} dx$, unter $l_{\mathcal{L}}$ eine additive Mengen-

funktion verstanden. Nun ist $L'_E = l_{\mathcal{L}}$. Die Note schließt mit einigen Folgerungen betreffend des Mittelwertsatzes und der Differenzierbarkeit (nach Gateau, Fréchet) im Raume der stetigen Funktionen.

Schauder (Lwów).

Maeda, Fumitomo: Kernels of transformations in the space of set functions. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 107—116 (1935).

Let $\mathfrak{C}_2(\beta)$ be a Hilbert space of complex functions defined over an abstract class L and possessing integrable square moduli relative to a measure β . Those set functions expressible (necessarily uniquely) in the form $\varphi(E) = \int_E f[\varphi] d\beta$, where $f[\varphi]$

is in $\mathfrak{C}_2(\beta)$ constitute a Hilbert space isomorphic to $\mathfrak{C}_2(\beta)$, and denoted also by $\mathfrak{C}_2(\beta)$, when the inner product is defined by $(\varphi, \psi) = \int_L f[\varphi] f[\psi] d\beta$. The linear manifold

generated in $\mathfrak{C}_2(\beta)$ by the set functions $\beta(EE')$, where E' is a parameter, is everywhere dense in $\mathfrak{C}_2(\beta)$; it is denoted by $\mathfrak{C}_2'(\beta)$. The author studies the integral operator $T_{\mathfrak{R}}$ defined by a kernel $\mathfrak{R}(E, E')$, in $\mathfrak{C}_2(\beta)$ for fixed E and also for fixed E' , through the relation $T_{\mathfrak{R}} \varphi(E) = \int_L \mathfrak{R}(E, A) f[\varphi(A)] d\beta(A)$. Kernels $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}^*$, and

\mathfrak{R}_T are introduced through the relations $\mathfrak{R}(E, E') = \int_L f[\mathfrak{R}_1(E, A)] f[\mathfrak{R}_2(A, E')] d\beta(A)$,

$\mathfrak{R}^*(E, E') = \overline{\mathfrak{R}(E', E)}$, $\mathfrak{R}_T(E, E') = T\beta(EE')$ respectively, where in the last T is an arbitrary linear operator such that the domains of T and T^* contain $\mathfrak{G}'_2(\beta)$ and T operates on $\beta(EE')$ considered as a set function with argument E . The author proves that $T_{\mathfrak{R}}$ is a closed linear operator which has domain including $\mathfrak{G}'_2(\beta)$ and which has the properties: $T_{\mathfrak{R}}^* \subseteq T_{\mathfrak{R}^*}$; $T_{\mathfrak{R}_1} T_{\mathfrak{R}_2} \subseteq T_{\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2}$; and, for $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_T$, $T \subseteq T_{\mathfrak{R}}$ and $T^* \subseteq T_{\mathfrak{R}^*}$. The results are specialized for the cases where the operators are bounded or self-adjoint. Further the kernels associated with unitary operators are shown to be characterized by the relations $(\mathfrak{R}(A, E), \mathfrak{R}(A, E')) = (\mathfrak{R}^*(A, E), \mathfrak{R}^*(A, E')) = \beta(EE')$, a generalization of a theorem of Bochner (this Zbl. 9, 116). M. H. Stone.

Ogasawara, Tôzîrô: Resolution of identity. J. Sci. Hiroshima Univ. A 5, 117 bis 130 (1935).

In this paper the author considers the definition and properties of the projection $E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda, U) dE(\lambda)$, where $F(\lambda, U)$ is the characteristic of the point set U and $E(\lambda)$

is a given resolution of the identity in a complex Euclidean space (in particular, in Hilbert space). The result is extended to complex resolutions of the identity — that is, to pairs of mutually permutable resolutions of the identity. Finally application is made to v. Neumann's spectral resolution of unitary operators and the resulting spectral resolution of self-adjoint operators. The method and results are not markedly different from those obtaining in Hilbert space and set forth in Chapters VI and VIII of the reviewer's "Linear Transformations in Hilbert Space" (New York, 1932), without restricting F to be a characteristic function but without indicating the simplifications resulting from such restriction. M. H. Stone (Cambridge, Mass., U.S.A.).

Tseng, Yuan-Yung: Spectral representation of self-adjoint functional transformations in a non-Hilbertian space. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 113 bis 125 (1935).

The author considers a space \mathfrak{E} which is a generalization of Hilbert space in two senses: scalar multiplication is extended to include multiplication by quaternions as well as by complex numbers; and all dimensionality restrictions are dropped. Thus the space \mathfrak{E} may be described as a quaternionic vector space or module which possesses a quaternion-valued Hermitian symmetric bilinear inner product (f, g) and which is complete in terms of the metric $|f - g| = (f - g, f - g)^{1/2}$. In his dissertation (University of Chicago, 1933), the author discussed the geometry of such spaces and the theory of bounded self-adjoint operators therein. In the present paper he obtains the spectral theory for general, not necessarily bounded, self-adjoint operators A . Using the product space $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ in a manner similar to that of v. Neumann (this Zbl. 4, 216), he constructs the bounded self-adjoint operator $(A - tI)(I + A^2)^{-1}$, where t is real, and shows that its spectral resolution yields that of A . The results thus generalize completely those already known in the case of Hilbert and complex Euclidean spaces. M. H. Stone (Cambridge, Mass., U.S.A.).

Funktionentheorie:

Priwaloff, I. I.: Gegenwärtige Probleme der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk. 1, 107—119 (1935) [Russisch].

Verf. gibt eine Übersicht der neueren Richtungen in der Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen im komplexen Gebiet. Autoreferat.

Montel, P.: L'itération. Wiadom. mat. 40, 217—230 (1935) [Polnisch].

Résumé succinct des résultats connus sur l'itération. Mentionons en particulier les résultats de M. Montel concernant les fractions rationnelles à termes entrelacés et les fonctions méromorphes qui sont limites de fractions à termes entrelacés sur l'axe réel [voir par exemple: Montel, Mathematica 5 (1931); ce Zbl. 2, 400].

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Kössler, M.: Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginärteile. Sonderdruck aus: *Mém. Soc. Roy. sci. Bohême* 1935, 8 S.

Es sei $0 < b < \pi$. Eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$, $f(0) = 0$, erfüllt die Bedingung $0 \leq \Im f(z) + b \leq \pi$ dann und nur dann, wenn

$$f(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(t) dt}{e^{it} - z}$$

gilt. Hier bezeichnet $\psi(t)$ eine reelle Funktion der ersten Baireschen Klasse, welche in $0 \leq t \leq 2\pi$ bis auf eine Nullmenge definiert ist und den Bedingungen

$$0 \leq \psi(t) \leq \pi, \quad \int_0^{2\pi} \psi(t) dt = 2\pi b$$

genügt.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Golusin, G. M.: Zur Theorie der schlichten konformen Abbildungen. *Rec. math. Moscou* 42, 169—189 u. deutsch. Zusammenfassung 189—190 (1935) [Russisch].

Soit $R_k^{(n)}$ la borne supérieure des quantités $\varrho < 1$ telles que toute fonction $\sum_{p=0}^{\infty} a_{pn+1} z^{pn+1}$ ($a_0 = 1$) univalente dans $|z| < 1$ transforme le cercle $|z| \leq \varrho$ en un domaine convexe. On a

$$R_k^{(n)} = \sqrt[n]{n+1 - \sqrt{n^2 - 2n}}. \quad (n \geq 1)$$

Une inégalité est donnée pour le cas de la série $\frac{1}{z} + \sum_{p=1}^{\infty} a_{pn-1} z^{pn-1}$. Soit D_n la

borne supérieure des rayons ϱ' tels que toute fonction univalente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ($a_1 = 1$) dans

$|z| < 1$ représente le cercle $|z| \leq \varrho'$ sur un domaine dont chaque point peut être relié à l'origine par une ligne brisée composée de n segments rectilignes au plus,

tous compris dans le domaine. On a $D_n > \operatorname{th} \frac{n\pi}{4} > 1 - 2e^{-\frac{n\pi}{2}}$ ($n \geq 1$). Citons

encore le théorème suivant: si $f(z) = z + \sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p}$ ($n \geq 1$) est une fonction convexe dans $|z| < 1$, quelles que soient les constantes réelles A, B on a:

$$\frac{2}{n} \int_0^{pn} \frac{Ar - \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 r^2}}{1 - r^2} dr \leq A \log |f'(z)| + B \arg f'(z) \leq \frac{2}{n} \int_0^{pn} \frac{Ar + \sqrt{A^2 + B^2 - B^2 r^2}}{1 - r^2} dr.$$

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Cotton, Émile: Sur l'étude locale des fonctions holomorphes et des fonctions algébroides de plusieurs variables (extension d'une méthode de Puiseux). *Ann. École norm.*, III. s. 52, 131—182 (1935).

Substituiert man in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, y, z) = \sum A_{abc} x^a y^b z^c$ von 3 (oder mehr) Variablen, in der das konstante Glied und beliebig viele weitere fehlen, die Ausdrücke $x = At^\alpha$, $y = Bt^\beta$, $z = Ct^\gamma$ (oder allgemeiner Potenzreihen von t mit den Anfangsgliedern At^α , Bt^β , Ct^γ) (α, β, γ natürliche Zahlen), so entsteht die Aufgabe, in der sich ergebenden Potenzreihe von t den niedrigsten auftretenden Exponenten in seiner Abhängigkeit von α, β, γ (und darüber hinaus von A, B, C) zu bestimmen. An die Stelle des Newtonschen Polygons, mit dessen Hilfe die entsprechende Aufgabe für 2 Variable behandelt wird, tritt hier ein gewisses konvexes Polyeder (die konvexe Hülle aller Punkte $(a+p, b+q, c+r)$, wo p, q, r alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchlaufen); die Punkte (a, b, c) , welche die zur Richtung (α, β, γ) normale Stützebene mit dem Polyeder gemein hat, liefern die gesuchten Reihenglieder, deren Summe im folgenden mit $F(x, y, z)$ bezeichnet wird. Hieran anschließend wird (Kap. 2) die durch $\mathfrak{P} = 0$ definierte algebroid Funktion y von x und z , insbesondere die Verzweigung derselben näher untersucht. Enthält z. B. jene Stützebene eine Kante

des Polyeders, so gibt es eine Zerlegung $F(x, y, z) = x^a y^b z^c \Phi(x^a y^b z^c)$ (wo Φ ein Polynom und a, b, c eine einfache geometrische Bedeutung besitzen). Zwischen den beiden Flächen $\mathfrak{P} = 0$ und $x^a y^b z^c = \tau$ ($=$ Wurzel von $\Phi(\vartheta) = 0$) läßt sich dann eine eindeutige und stetige Zuordnung herstellen, mit Hilfe deren eine Parameterdarstellung der ersteren (genauer: je eines gewissen Bestandteils derselben):

$$x = \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}, \quad y = c[1 + \varphi(\lambda, \mu)] \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}, \quad z = \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2}$$

aufgestellt wird (φ wieder Potenzreihe ohne konstantes Glied). Die hieran anschließende weitere Untersuchung (Herstellung von Regularitätsgebieten der algebroiden Funktion und Verhalten der letzteren in den Restgebieten) gestaltet sich, da mehrfache Fallunterscheidungen und Iterationen des Verfahrens erforderlich werden, ziemlich weitläufig. — Im 3. Kap. wird die vorher auseinandergesetzte Methode auf die Untersuchung der durch zwei Gleichungen $\mathfrak{P}_1(x, y, z) = 0$, $\mathfrak{P}_2(x, y, z) = 0$ definierten algebroiden Funktionen y und z von x angewandt, im 4. Kap. einige spezielle Fälle behandelt.

F. Hartogs (München).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Kolmogoroff, A.: Zur Theorie der Markoffschen Ketten. Math. Ann. 112, 155—160 (1935).

E_1, E_2, \dots, E_n seien die möglichen Zustände eines physikalischen Systems; $Q_k(s)$ ($1 \leq k \leq n, -\infty < s < +\infty$) sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zur Zeit s im Zustand E_k befindet; $P_{ik}(t, s)$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, -\infty < t < s < +\infty$) sei die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zur Zeit s im Zustand E_k befindet, unter der Voraussetzung, daß es zur Zeit t im Zustand E_i war. Verf. beweist: 1. Zu beliebig vorgegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t, s)$ lassen sich mindestens auf eine Weise zugehörige „absolute“ Wahrscheinlichkeiten $Q_k(s)$ bestimmen. 2. Damit die Festlegung der $Q_k(s)$ eindeutig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $P_{ik}(t, s)$ bei festen i, k, s und bei $t \rightarrow -\infty$ gegen einen von i unabhängigen Grenzwert $Q_k^*(s)$ konvergiert; die Grenzwerte $Q_k^*(s)$ geben dann gerade die gesuchten absoluten Wahrscheinlichkeiten. — Ist ein festes System $Q_k(s)$ von absoluten Wahrscheinlichkeiten gewählt, und ist $Q_k(s) > 0$ ($1 \leq k \leq n, -\infty < s < +\infty$), so lassen sich leicht die „umgekehrten“ Übergangswahrscheinlichkeiten $\Pi_{ik}(t, s)$ (Wahrscheinlichkeit des Zustandes E_i zur Zeit t unter der Voraussetzung, daß in einem späteren Zeitpunkt s der Zustand E_k eintritt) eindeutig berechnen. Unter der Voraussetzung, daß $P_{ik}(t, s) = P_{ik}(s-t)$ nur von der Differenz $s-t$ abhängt (Stationaritätsbedingung), beweist Verf.: 3. Damit $\Pi_{ik}(r) = P_{ki}(r)$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n, -\infty < r < +\infty$) sei, ist notwendig und hinreichend, daß für beliebige $r, q, k_1, k_2, \dots, k_q$

$$\begin{aligned} & P_{k_1 k_2}(r) P_{k_2 k_3}(r) \dots P_{k_{q-1} k_q}(r) P_{k_q k_1}(r) \\ &= P_{k_1 k_q}(r) P_{k_q k_{q-1}}(r) \dots P_{k_2 k_1}(r) P_{k_1 k_2}(r) \end{aligned}$$

gilt; insbesondere ist also die Symmetriebedingung $P_{ik}(r) = P_{ki}(r)$ hinreichend. — Zum Schluß wird ein physikalisches Beispiel diskutiert, das in einer gewissen Beziehung zu den bekannten Untersuchungen Schrödingers über die Umkehrung der Naturgesetze (dies. Zbl. 1, 375) steht.

A. Khintchine (Saratow).

Gulberg, Alf: Eine Anwendung der Differenzengleichungen in der theoretischen Statistik. Aktuär. Vedy 5, 116—128 (1935).

Mit Hilfe von Differenzengleichungen werden die Momente und Halbinvarianten für die Pólya-Eggenbergersche Verteilung in einer und zwei Dimensionen berechnet (vgl. auch dies. Zbl. 11, 408).

W. Feller (Stockholm).

Gulberg, Sven: Recurrences formulae for the semi-invariants of some discontinuous frequency functions of n variables. Skand. Aktuarie Tidskr. 18, 270—278 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 12, 113.

Linder, Arthur: Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ordnungen aus den Beobachtungszahlen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 30, 35—52 (1935).

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen erfolgt für die Absterbeordnung meist nach der Formel

$$q_x = \frac{T}{B + \frac{1}{2}(E - A)}.$$

Verf. leitet eine genauere Formel ab und erhält

$$q_x = 1 - \prod_{i=1}^z \left(1 - \frac{d_i}{l_x + \sum_{i=1}^{i-1} (\gamma_i - d_i)} \right).$$

Zur Ableitung dieser Formel denkt er sich das Jahr in z Teile zerlegt und macht die beiden fol. Voraussetzungen: 1. Die Zahl der Sterbefälle und der Mehrzugezogenen oder Weggezogenen ist bekannt. 2. Die Ein- und Austritte erfolgen am Ende eines jeden der z Jahrestteile. — d_i ist die Anzahl der Sterbefälle im i -Intervall und γ_i die Anzahl der Mehrzugezogenen oder Weggezogenen am Ende des i -Intervalles. — Außerdem wird noch eine von Insolera abgeleitete Näherungsformel dargestellt. *Löer.*

Thompson, William R.: On a criterion for the rejection of observations and the distribution of the ratio of deviation to sample standard deviation. Ann. math. Statist. 6, 214—219 (1935).

Zwigg, E.: Zur Frage des Beharrungszustandes. Metron 12, Nr 3, 91—100 (1935.)

Unter gewissen Voraussetzungen wird die Änderung der Sterblichkeit einer rein weiblichen Bevölkerung berechnet, die notwendig ist dafür, daß der Bevölkerungszustand stationär bleibt, während sich die Fruchtbarkeit verändert, und zwar in allen Altersklassen relativ gleich stark.

W. Feller (Stockholm).

Castellano, V.: Recente letteratura sugli indici di variabilità. Metron 12, Nr 3, 101 bis 131 (1935).

Robbins, Rainard B.: Actuarial note: Osculatory curve of minimum degree using method of Lidstone's demonstration. Trans. Actuar. Soc. Amer. 35, 244—247 (1934).

Koepller, Hans: Die Anwendung der Integralgleichungen von Volterra in der Lebensversicherung. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 5, 86—118 (1935).

Im ersten Teile dieser Arbeit wird die Lösung der Voltterraschen Gleichungen zweiter Gattung mit der einfachen in der Versicherungsmathematik üblichen Form der iterierten Kerne angeführt und besonders die Lösung der sogenannten prospektiven Gleichung

$$\varphi(x) = f(x) \pm \int_x^k K(\xi, x) \varphi(\xi) d\xi$$

unter der Annahme

$$K(\xi, x) = \frac{\lambda(\xi)}{\lambda(x)} \mu_\xi$$

abgeleitet. In der retrospektiven Integralgleichung hat man den Integrationsbereich von 0 bis x . Es zeigt sich bei der Umformung der Kerne eine Neutralisation derselben in bezug auf die Integralgrenzen, und die Lösung dieser Gleichungen mit neutralem Kern kann leicht durch Iteration ohne Anwendung des Satzes von Dirichlet durchgeführt werden. Dann werden die Lösungen dieser Integralgleichungen mittels der Formel

$$z(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \int_0^x \frac{du(x)}{v(x)} - \int_0^x \frac{u(x)}{v^2(x)} dv(x) + z_0,$$

die als Vorstufe der von Loewy (vgl. dies. Zbl. 1, 345, 346) verwendeten Formel anzusehen ist, sowie der Formel, die durch partielle Integration der Beziehung $z(x) = u(x) \cdot v(x)$ hergestellt wird, angegeben. Durch weitere Untersuchungen gelangt der Verf. zur Ansicht, daß es vollkommen genügt und zweckmäßiger ist, die Differentialgleichung der Prämienreserve, die man meist zur Aufstellung der zugehörigen Integralgleichung kennen muß, richtig zu integrieren. Zum Schluß wird die

Lösung einiger Integralgleichungen mit allgemeinerer Form des Kernes angegeben, zu der den Verf. die Integralgleichung des Leibrentenbarwertes der Invaliden (Versicherungsarchiv 5, Nr 10) geführt hat.

Janko (Praha).

Geometrie.

● Lie, Sophus: *Gesammelte Abhandlungen*. Bd. 2, Geometr. Abh. Abt. 2, Tl. 1. Hrsg. v. Friedrich Engel u. Poul Heegard. Leipzig: B. G. Teubner u. Oslo: H. Aschehoug & Co. 1935. VIII, 479 S. RM. 15.—

Das vorliegende Buch trägt den Untertitel „Geometrische Abhandlungen, zweite Abteilung, erster Teil“; die geometrischen Abhandlungen sind nämlich auf die ersten beiden Bände der Gesamtausgabe verteilt; der zweite Teil des ersten sowie des zweiten Bandes stehen noch aus. Die ersten vier Arbeiten des vorliegenden Teiles sind erweiterte Neudarstellungen von Untersuchungen aus dem ersten Teil des ersten Bandes. Sie befassen sich mit den Komplexen (an Lies Dissertation anknüpfend), mit den Minimalflächen und mit geodätischen Linien. Die übrigen fünf Aufsätze sind der Grundlegung der Geometrie nach Helmholtz gewidmet, und zwar sind es alle Abhandlungen Lies aus diesem Gebiet, wenn man von der zusammenfassenden Darstellung im dritten Band der „Theorie der Transformationsgruppen“ absieht. In ihnen werden bekanntlich die euklidische und die nichteuklidischen Geometrien durch die Beweglichkeit des starren Körpers — unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die Bewegungen — gekennzeichnet. Die neueren an diese Fragestellung anknüpfenden axiomatischen Untersuchungen setzten sich die Beseitigung der Differenzierbarkeitsannahmen zum Ziel.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Steck, Max: *Der Ψ_1 -Vertauschungs-Kalkül*. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1935, 1—13 (Abh. 5).

Liegen die Punkte 1, 3, 5 und 2, 4, 6 je auf einer Geraden und ferner die drei Schnittpunkte $(1\ 2) \times (4\ 5)$, $(2\ 3) \times (5\ 6)$, $(3\ 4) \times (6\ 1)$, so bestimmen auf Grund des „großen Vertauschungssaxioms“ die Punkte 1 bis 6 auch noch eine Pascalkonfiguration, wenn irgendein gerader Punkt mit einem ungeraden Punkt vertauscht wird. Die so erhaltenen 9 weiteren Pascalkonfigurationen haben Pascalgeraden, die auf Grund der ebenen Verknüpfungssätze zu je dreien durch die drei Punkte der ursprünglichen Pascalgeraden hindurchgehen. Der Wirkung der genannten Vertauschungen auf eine gegebene Pascalkonfiguration wird untersucht und symbolisch geschrieben. In einer früheren Arbeit wurde dasselbe für die Vertauschungen der geraden bzw. ungeraden Punkte unter sich (sog. „kleine Vertauschungen“) durchgeführt (s. dies. Zbl. 10, 73 u. 12, 175).

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Mitchell, H. H.: *Linear groups and finite geometries*. Amer. Math. Monthly 42, 592—603 (1935).

Verf. gibt eine historische Übersicht über die Darstellung von endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen in Galoisfeldern und gewisse damit zusammenhängende geometrische Probleme. Der Zusammenhang mit endlichen Geometrien wird besonders durch die Untersuchung der ternären und quaternären linearen Gruppen dargestellt.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Godfrey, Edwin L.: *A note on Bieberbach's trisection method*. Scripta Math. 3, 326 (1935).

Oakley, C. O.: *Equations of polygons*. Amer. Math. Monthly 42, 476—487 (1935).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen [Tōhoku Math. J. 41, 52—69 (1935); dies. Zbl. 12, 244] des Verf. wird bewiesen: Der Rand eines regulären $2n$ -Ecks ist Graph einer semilinearen Gleichung der Ordnung n . Der Rand eines konvexen Vierecks ist Graph einer semilinearen Gleichung der Ordnung 2. Friedrich Levi (Calcutta).

Hill, L. S., and M. D. Darkow: *An algebraic treatment of geometry on a spherical surface*. Scripta Math. 3, 234—246 u. 329—336 (1935).

● Prüfer, Heinz: *Projektive Geometrie*. Aus d. Nachlaß hrsg. v. G. Fleddermann u. G. Köthe. Leipzig: Robert Noske 1935. VII, 314 S. u. 251 Fig. RM. 8.—

Die vorliegende projektive Geometrie ist durch das Hervortreten axiomatischer Gedanken ausgezeichnet, welche die Stoffeinteilung und die Arbeitsmethode weitgehend beeinflussen. — Der erste Abschnitt über den projektiven Raum geht von den Verknüpfungs-

eigenschaften aus, der zweite von den Axiomen der Anordnung. Es folgt die Behandlung der projektiven Abbildungen, Ausführungen über die projektive Erzeugung der Kegelschnitte, Regelscharen und Flächen zweiter Ordnung, kollokale Projektivitäten, Polaritäten und gruppentheoretische Überlegungen einfacher Art. Im sechsten Abschnitt beginnt die metrische Geometrie (Axiom der Orthogonalität), danach die nichteuklidische Geometrie. Theoretische Untersuchungen über die darstellende Geometrie sowie die Einführung von Koordinaten und die rechnerische Behandlung einiger Probleme bilden den Abschluß. — Der projektive geometrische Inhalt bildet einen geschickt begrenzten Teilausschnitt aus den leichteren Partien des Reyeschen Werkes in einer modernen Fassung.

Haenzel (Karlsruhe).

Prenowitz, Walter: The characterization of plane collineations in terms of homologous families of lines. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 564—599 (1935).

Eine topologische Transformation T , welche ein geradliniges 4-Gewebe der euklidischen Ebene in ein ebensolches Gebilde überführt, ist eine Projektivität. Unter der Voraussetzung der zweimaligen Differenzierbarkeit von T ist das von E. Kasner [Bull. Amer. Math. Soc. 9, 545 (1903)] bewiesen, das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis des Satzes ohne Differenzierbarkeitsannahmen. Die zweimalige Differenzierbarkeit von T läßt sich nachweisen, wenn das 4-Gewebe zwei „reguläre“ Geradenscharen enthält. Dabei heißt die Gerade $g(t_0)$ der Schar $g(t)$ regulär, wenn zwei geradlinige Transversalen a und b die Geraden der Schar bzw. in den Punkten $A(t)$ und $B(t)$ so treffen, daß das Streckenverhältnis $A(t)A(t_0) : B(t)B(t_0)$ mit $t \rightarrow t_0$ einen Grenzwert besitzt, und eine Schar heißt regulär, wenn alle Geraden der Schar es sind. Nichtreguläre Geraden werden bei T projektiv auf ihre Bildgerade transformiert. Daraus ergibt sich T direkt als Projektivität, wenn das 4-Gewebe nicht drei reguläre Scharen enthält. — Weitere Sätze über die Abbildungen von 3-Geweben mit Sechseckkonfiguration sind bekannt oder leicht aus bekannten Eigenschaften derselben zu gewinnen.

Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Iuga, G.: Sur une propriété fonctionnelle de certaines surfaces. Bul. Soc. şti. Cluj 8, 218—227 (1935).

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit werden einige spezielle, auf die Parameter u, v bezogene Flächen angegeben, für welche das Volumen des Tetraeders $(u + jh, v + jk)$, $j = 0,1$, von u und v unabhängig ist.

W. Feller (Stockholm).

Turrière, Émile: Tétraèdre et géométrie des masses. Enseignement Math. 33, 285—321 (1935).

Suite d'un article sur l'équivalence en géométrie des masses [Enseignement Math. 30, 62—90 (1931)]. I. Tout système de masses est équivalent à une infinité de systèmes de quatre masses égales situées aux sommets de tétraèdres T , inscrits à E , circonscrits à E' et dont les arêtes sont tangentes en leurs milieux à E'' , où E, E' et E'' sont des ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Etude du système T (qui selon le réf. peut être déduit par une affinité d'un système de ∞^3 tétraèdres réguliers, congruents et de même centre). La somme des carrés des six arêtes et celle des carrés des trois lignes moyennes sont constantes. Les tétraèdres ont même volume. L'auteur détermine les tétraèdres équifaciaux du système et ajoute une propriété caractéristique de ces tétraèdres. Il démontre l'existence de ∞' tétraèdres orthocentriques dans le système, le lieu de l'orthocentre H étant une biquadratique gauche. Quatre des normales issues de H à E sont les hauteurs du tétraèdre, les deux autres sont toujours réelles. II. Quatre masses quelconques sont placées aux sommets d'un tétraèdre. L'ellipsoïde central d'inertie du quadruplet et le moment d'inertie polaire au centre de gravité. III. Le cas particulier du tétraèdre orthocentrique.

O. Bottema.

Süss, Wilhelm: Über Krümmungseigenschaften im Großen von Eilinen und Eiflächen. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1935, 1—11 (Abb. 4).

Ist $r(t)$ der Krümmungsradius einer Eilinie als Funktion des Tangentenwinkels t , so gilt, wie leicht zu sehen,

$$\int_0^\pi d(t) \sin t \, dt = 0, \quad d(t) = r(t) - r(t + \pi).$$

Hieraus wird sehr einfach der von Blaschke herrührende Satz gefolgert, daß auf jeder Eilinie wenigstens drei Punktepaare derart existieren, daß in den Punkten jedes Paares die Tangenten parallel und die Krümmungen gleich sind. Aus diesem Satz lassen sich der Vierecksatz und mehrere verwandte, teils neue, teils von Segre (vgl. dies. Zbl. 10, 370, 371; 11, 35, 130) herrührende Sätze mühelos folgern. Ferner werden ähnliche Betrachtungen für die relative Differentialgeometrie angestellt. — Zwei Punkte einer Eifläche heißen Gegenpunkte, wenn die zugehörigen Tangentialebenen parallel sind. Es gelten die folgenden beiden Sätze: Auf jeder stetig und überall positiv gekrümmten Eifläche gibt es 1. wenigstens ein Paar von Gegenpunkten, in denen die Dupinschen Indikatrizien homothetisch sind, und 2. wenigstens ein Gegenpunktepaar mit kongruenten Indikatrizien. Der erste ist Spezialfall des Satzes, daß jede solche Eifläche wenigstens einen Relativ-Nabelpunkt bezgl. einer stetig und positiv gekrümmten Eifläche besitzt, und dieser Satz folgt unmittelbar aus der Nichtexistenz von regulären Kurvennetzen auf Flächen vom Geschlecht 0. Der Beweis des zweiten Satzes stützt sich auf den hier nach H. Kneser sehr einfach bewiesenen Hilfssatz: Zwei auf der Kugelfläche stetige und ungerade Funktionen haben wenigstens eine gemeinsame Nullstelle. Diesen Satz wendet Verf. auf $r_1(x) - r_1(-x)$ und $r_2(x) - r_2(-x)$ an, wo $r_1(x)$ und $r_2(x)$ die Hauptkrümmungsradien als Funktionen der Normalenrichtung sind. Diese Anwendung scheint dem Ref. jedoch unzulässig, da r_1 und r_2 auf der Fläche, also auch auf dem sphärischen Bild nicht eindeutig zu sein brauchen. (Beispiel: dreiaxsiges Ellipsoid.) Man gelangt aber zu dem gewünschten Ergebnis, wenn man den Hilfssatz auf die Differenz der Gaußschen bzw. der mittleren Krümmung in Gegenpunkten anwendet. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Santaló, L. A.: Eine Integralformel für die konvexen Figuren in der Ebene und im Raum. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. 10, 209—216 (1935) [Spanisch].

Es sei K ein ebener konvexer Bereich, L die Länge seines Randes. Ferner sei $l > 0$ gegeben. Um jeden äußeren Punkt $P = (x, y)$ von K lege man den Kreis vom Radius l . Der Winkel, der von allen den Radien dieses Kreises erfüllt wird, die K treffen, habe die Größe $\omega = \omega(x, y)$. Dann gilt

$$\iint \omega(x, y) dx dy = 2lL,$$

wo die Integration über das Äußere von K oder, was auf dasselbe hinausläuft, über das Ringgebiet zwischen der Randkurve von K und ihrer Parallelkurve im Abstand l zu erstrecken ist. Diese und die analoge Formel für konvexe Körper im Raume werden direkt und elementar für Polygone bzw. Polyeder bestätigt und dann durch Grenzübergang verallgemeinert. In allgemeinerem Zusammenhang sind die Formeln vom Verf. in anderen, demnächst erscheinenden Publikationen hergeleitet worden. Für den Fall der Ebene vgl. auch Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie I, § 12 [*Hamburg. math. Einzelschr.* 20 (1935); vgl. nachst. Referat]. *W. Fenchel*.

● **Blaschke, Wilhelm: Vorlesungen über Integralgeometrie. I. (Hamburger math. Einzelschr. H. 20.)** Leipzig: B. G. Teubner 1935. 47 S. RM. 4.—

Das vorliegende Heft bildet den ersten der euklidischen Ebene gewidmeten Teil eines Lehrbuchs der Integralgeometrie, das ist die aus den geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblemen entstandene Theorie der Integralinvarianten der Bewegungsgruppen. Etwa die erste Hälfte des Heftes enthält eine einfache systematische Herleitung der auf Punkt- und Geradenmaß bezüglichen, hauptsächlich von Crofton herrührenden Ergebnisse, wobei jedoch (ebenso wie im folgenden Teil) von einer genauen Abgrenzung des Gültigkeitsbereichs der Formeln usw. abgesehen wird. Der zweite Teil behandelt in der Hauptsache den von Poincaré eingeführten Begriff des kinematischen Maßes und einige sehr bemerkenswerte, das isoperimetrische Problem betreffende Anwendungen, die von Santaló und dem Verf. herrühren. Es handelt sich dabei um folgendes: In der Ebene betrachte man eine Figur und alle zu ihr kongruenten. Die Figur sei so beschaffen, daß die Bewegungsgruppe in bezug auf diese Menge \mathfrak{M} kongruenter Figuren einfach transitiv ist (Beispiele: Strecke, rechtwinkliges Achsenkreuz, Kreis mit einem darauffliegenden Punkt, Kurvenbogen usw.). Dann läßt sich wesentlich eindeutig für die (genügend anständigen) Teilmengen von \mathfrak{M} ein gegenüber Bewegungen invariantes Maß einführen. In gruppentheoretischer Sprache ist dieses kinematische Maß nichts anderes als das invariante Volumen im Parameterraum der Bewegungsgruppe. Für das kine-

matische Maß werden zunächst einige analytische Darstellungen hergeleitet. Von den Anwendungen seien die folgenden hervorgehoben: Durch Berechnung des kinematischen Maßes der Menge aller Strecken gegebener Länge, die einen konvexen Bereich treffen, ergibt sich nach Santaló eine von ihm auch direkt bewiesene Formel (vgl. vorsteh. Ref.). — Es seien \mathbb{K}_0 eine feste, \mathbb{K} eine bewegliche geschlossene konvexe Kurve, F_0, F die Flächeninhalte und U_0, U die Umfänge von \mathbb{K}_0 bzw. \mathbb{K} . Dann ergibt sich für das kinematische Maß der Menge aller zu \mathbb{K} kongruenten Kurven, die \mathbb{K}_0 treffen,

$$f\mathbb{K} = 2\pi(F_0 + F) + U_0 U. \quad (1)$$

[Ist \mathbb{K} speziell ein Kreis, so geht (1) in die Formel von Steiner für den Inhalt einer Parallelkurve über.] Zählt man andererseits bei der Berechnung des kinematischen Maßes jede Kurve \mathbb{K} n -fach, wenn sie n Schnittpunkte mit \mathbb{K}_0 hat, so findet man

$$fn\mathbb{K} = 4U_0 U. \quad (2)$$

Spezialisiert man (1) und (2), indem man für \mathbb{K} einen Kreis mit einem Radius r wählt, der zwischen Inkreis- und Umkreisradius von \mathbb{K}_0 liegt, so erhält man nach Santaló durch Vergleich von (1) und (2)

$$\left(\frac{U^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r\right)^2 = F_4 + 2F_6 + \dots, \quad (3)$$

wo F_i den Inhalt des Gebiets der Mittelpunkte derjenigen Kreise vom Radius r bezeichnet, die \mathbb{K}_0 in genau i Punkten treffen. Die Formel (3) setzt nicht nur die isoperimetrische Ungleichung selbst, sondern sogar ihre von Bonnesen herrührenden Verschärfungen in Evidenz. — Wählt man \mathbb{K} kongruent \mathbb{K}_0 , so ergibt sich, ebenfalls nach Santaló, eine andere Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung. — Durch Abänderung der erstgenannten Methode von Santaló gelingt es dem Verf., einen ähnlich einfachen Beweis der Ungleichung von Minkowski für den gemischten Flächeninhalt von zwei konvexen Bereichen sowie ihrer Verschärfung von Bonnesen zu führen. Hier tritt naturgemäß die Translationsgruppe an die Stelle der Bewegungsgruppe. — Das Heft schließt mit einer Sammlung von Aufgaben und Hinweisen auf ungelöste Probleme sowie einem Literaturverzeichnis. W. Fenchel (Kopenhagen).

Blaschke, Wilhelm: Integralgeometrie 2. Zu Ergebnissen von M. W. Crofton. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **37**, 3—11 (1935).

Anknüpfend an eine frühere Untersuchung (vgl. dies. Zbl. **12**, 34) leitet der Verf. eine allgemeine Formel für die Dichte eines durch $r+1$ linear unabhängige seiner Punkte gegebenen r -dimensionalen Unterraumes des n -dimensionalen euklidischen Raumes her. Mit Hilfe dieser Formel wird eine Formel vom Croftonschen Typus (vgl. dies. Zbl. **12**, 118, Varga) gewonnen, die das Produkt der Dichten von $r+1$ Punkten ausdrückt durch das Volumen des durch die Punkte bestimmten Simplex, die Dichte des von ihnen aufgespannten r -dimensionalen Unterraums und die Dichten der Punkte in diesem Unterraum. W. Fenchel (Kopenhagen).

Haupt, Otto: Strukturprobleme bei reellen Gebilden. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **1935**, 183—188 (H. 2).

Zusammenstellung der wichtigsten Sätze und Probleme für die Struktur der reellen Gebilde ohne Beweis. Die (lineare) Ordnung eines Punktes P eines ebenen Bogens \mathfrak{B} ist Minimum der Ordnungen aller Umgebungen von P auf \mathfrak{B} . Die Punkte einer vorgegebenen Ordnung $n (\geq 2)$ liegen nirgends dicht auf \mathfrak{B} , falls sie nicht ganze Teilbogen erfüllen. Diese Teilbogen sind ordnungshomogen. Verteilungssatz: Jeder Bogen \mathfrak{B} ist Summe aus ordnungshomogenen Bogen und nirgends dicht verteilten Punkten. Existenzsatz: Jeder ordnungshomogene Bogen \mathfrak{B} ist entweder von der kleinstmöglichen oder von der höchstmöglichen Ordnung. Sind m_1 und m diese Ordnungen, so sind $m_1 = 2$ und $m = \infty$. — Ersetzt man die lineare Ordnung durch die zyklische, so bleiben die zwei Sätze gültig. Dann sind aber $m_1 = 3$ und $m = \infty$. (Der Beweis des Existenzsatzes ohne jegliche Differenzierbarkeitsannahmen befindet sich unter der Presse.) Der Beweis läßt sich für allgemeine Ordnungsbegriffe verallgemeinern, bei welchen die Geraden bzw. Kreise durch gewisse ebene Kurven ersetzt werden, deren jede durch k Punkte eindeutig festgelegt ist. — Ersetzt man den ebenen Bogen, einen im R_n liegenden Bogen und die Geraden durch die Hyperebenen von R_n , so gilt wieder der Verteilungssatz. Es scheint, daß auch der Existenzsatz unverändert bleibt, wo aber $m_1 = n$ und $m = \infty$ sind. — Ersetzt man den Bogen im R_n bzw. die Hyperebenen durch eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit M_k von R_n

bzw. durch die $(m - k)$ -dim. linearen Mannigfaltigkeiten von R_n , so bleibt der Verteilungssatz gültig; dabei treten aber an Stelle der ordnungshomogenen Teilbogen ordnungshomogene k -dim. Mannigfaltigkeiten von M_k . Es gibt für jede positive Zahl $1 \leq h \leq k$ ordnungshomogene M_k von der Ordnung $m_h = h(n - k + 1)$ im R_n . Es läßt sich auch zeigen, daß unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen keine anderen Ordnungen auftreten können. Verf. vermutet, daß es auch im allgemeinen Falle an ordnungshomogenen M_k nur solche von der Ordnung ∞ neu hinzutreten können. — Für ebene Bogen gilt auch der Punkt-Existenzsatz: Es gibt Punkte jeder vorgegebenen linearen Ordnung $n (\geq 2)$. In betreff der Verallgemeinerung dieses Satzes ist bisher wenig bekannt. — Endlich weist Verf. auf die ordnungshomogene Erweiterbarkeit der Bogen n -ter Ordnung im R_n hin.

Sz. Nagy (Szeged).

Differentialgeometrie:

Myller, A.: Die Flächenkrümmung von Bacaloglu. Gaz. mat. 41, 123—126 (1935) [Rumänisch].

Der Verf. bespricht kurz die Geschichte der verschiedenen Ausdrücke, welche als Maß der Krümmung einer Fläche vorgeschlagen wurden. Insbesondere wird auf den Beitrag des frühesten rumänischen Mathematikers, Emanuel Bacaloglu (Z. Math. Phys. 1859), zu dieser Frage hingewiesen. I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

Lebesgue, H.: Détermination de toutes les surfaces réglées applicables sur le plan. Prakt. Akad. Athénon 10, 303—311 (1935).

F sei eine Regelfläche; M sei ein Punkt auf F und U_M eine Umgebung von M auf F , die längentreu auf die Umgebung U_m eines Punktes m der euklidischen Ebene abgebildet ist. Dabei werde dem Stück AB der Erzeugenden durch M in U_M die Strecke ab durch m in U_m zugeordnet. Man kann als Teilumgebung V_m von m in U_m ein Trapez $a_1 b_1 b_2 a_2$ so abgrenzen, daß $a_1 a_2 \perp ab$, $b_1 b_2 \perp ab$ und $a_1 a_2, b_1 b_2$ Bilder von Teilstrecken von Erzeugenden der Fläche F sind und sich die Bilder zweier Erzeugender weder in V_m noch einer gewissen umfassenderen Umgebung schneiden. Dann ist jedem Punkt a_0 von $a_1 a_2$ umkehrbar eindeutig der Punkt l_0 von $b_1 b_2$ zugeordnet, in dem das Bild der Erzeugenden durch a_0 die Strecke $b_1 b_2$ trifft. Es werde $|a_1 a_0| = t$, $|ab| = h$ gesetzt. Das Bild von a_0 auf F sei $(x(t), y(t), z(t))$ und das von b_0 sei $(x(t) + \alpha(t), y(t) + \beta(t), z(t) + \gamma(t))$. Für fast alle t gilt dann, wenn S die Summation über x, y, z bzw. α, β, γ bedeutet: (1) $S(x'(t))^2 = 1$, (2) $Sx'(t)\alpha'(t) = \sqrt{S(\alpha'(t))^2}$, (3) $\sqrt{S(\alpha')^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{S\alpha^2 - h^2}$, (4) $S\alpha x' = \sqrt{S\alpha^2 - h^2}$, wobei (4) eine Folge von (1), (2), (3)

ist, wenn nicht auf einer Menge positiven Maßes $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ ist. Die Punkte der V_m auf F entsprechenden Umgebung V_M oder M können in der Form (5): $(x(t) + \varrho \alpha(t), y(t) + \varrho \beta(t), z(t) + \varrho \gamma(t))$ dargestellt werden. Es wird gezeigt, daß die notwendigen Bedingungen (1) bis (4) auch hinreichend dafür sind, damit ein in der Form (5) dargestelltes Flächenstück auf die Ebene abwickelbar ist. Die Gleichungen (1), ..., (4) werden sogar explizit integriert, d. h. es werden alle Funktionen-tripel (5) angegeben, die den 4 Gleichungen genügen. H. Busemann (Kopenhagen).

Rozet, O.: Sur la déformation du paraboloïde. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 893—905 (1935).

Soit P — un paraboloïde rapporté aux génératrices $u, v, (S)$ — une surface applicable sur P . L'auteur construit sur chaque tangente de u ou de v de (S) deux points S_1^*, S_1^{**} et S_2^*, S_2^{**} . Les lignes de courbure se correspondent sur (S_1^*) , (S_2^{**}) tandis que les lignes de longueur nulle correspondent aux asymptotiques de (S) . Si P est un paraboloïde de révolution, deux surface (S_1^*) , (S_2^{**}) coïncidents et deviennent minima.

S. Finikoff (Moscou).

Popa, I.: Géométrie centro-affine parabolique des courbes et des surfaces. Ann. Sci. Univ. Jassy 21, 141—181 (1935).

Unter zentroaffiner, parabolischer (Z - A - P)-Geometrie der Ebene versteht Verf.

die Geometrie derjenigen Gruppe projektiver Transformationen, die eine Gerade und einen in der Geraden gelegenen Punkt fest läßt. Die $Z-A-P$ -Geometrie des Raumes besitzt als Fixelemente eine Ebene und einen inzidenten Punkt. Der I. Teil der Arbeit ist den ebenen Kurven gewidmet. Die Methoden sind die gleichen wie in der hyperbolischen $Z-A$ -Geometrie. Nach Ableitung der Grundformeln werden verschiedene Anwendungen durchgeführt. Der II. Teil behandelt die Raumkurven. Im III. Teil wird gezeigt, daß eine Fläche gegenüber der betrachteten Gruppe durch eine quadratische und eine kubische Differentialform bestimmt ist, zwischen deren Koeffizienten zwei Integrabilitätsbedingungen gelten. Den Schluß bildet die Untersuchung linearer Komplexe, die invariant mit der Fläche verbunden sind. *W. Haack* (Berlin).

Simonart, Fernand: Sur les congruences d'Appell à surface moyenne plane. *Ann. Soc. Mar. Bruxelles A* 55, 98—110 (1935).

L'auteur examine des cas particuliers des congruences D dont l'enveloppée moyenne se réduit à l'origine et la surface moyenne est le plan $z = h$. Il est bien connu que les rayons de D sont parallèles aux normales d'une surface S qui correspond au plan $z = h$ avec orthogonalité des éléments linéaires. Cela posé, les congruences D à $h = 0$ correspondent aux surfaces S de révolution; si D est normale, S est un hélicoïde minimum. La seule congruence D de Guichard est engendrée par les tangentes communes à deux sphères égales. *S. Finikoff* (Moscou).

Finikoff, Serge: Couples stratifiables attachés aux surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 1090—1091 (1935).

Im Anschluß an Pantazi (dies. Zbl. 8, 177) untersucht Verf. stratifizierbare Paare von Strahlensystemen. Als Enveloppe der Lie- F_2 der stratifizierenden Flächen ergibt sich eine feste Fläche II. Grades, zu der noch zahlreiche andere stratifizierbare Paare von Strahlensystemen gehören. *W. Haack* (Berlin).

Calapso, Renato: Ricerche sulle cubiche gobbe in contatto tripunto o quadripunto con le asintotiche di una data superficie. *Mathematica, Cluj* 11, 42—57 (1935).

Dans une Note antérieure (ce Zbl. 2, 207) l'auteur a montré que le complexe linéaire défini par une cubique gauche C_3 qui est au point P d'une surface (P) en contact de 6 points avec une asymptotique a_1 de (P) contient toutes les génératrices de la quadrique de Lie de (P) qui interceptent la tangente de a_1 . Il montre maintenant que les cubiques C_3, C_4 qui sont en contact de 3 ou 4 points avec a_1 , possèdent la même propriété à moins que le produit des deux systèmes nuls (celui de C et le système osculateur de a_1) soit une homographie biaxiale parabolique dont l'axe coïncide avec la tangente de a_1 . Ceux de C_4 qui sont projetées du point P par un cône ayant un contact de 6-points avec a_1 sont dites canoniques; elles sont canoniques spéciales si elles passent par le point où la première directrice de (P) perse la quadrique de Lie. Application à la construction de la normale projective. *S. Finikoff*.

Marletta, G.: Osservazioni di geometria proiettiva differenziale. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s.* 22, 231—233 (1935).

Es sei P ein Punkt auf einer Fläche F ; die Schnittkurve γ von F mit der Tangentialebene π in P hat in P einen Doppelpunkt. Es gibt in π eine einzige C^3 (und eine einzige C^5), für die P ein Doppelpunkt (ein vierfacher Punkt) ist, und die eine 4punktige (eine 6punktige) Berührung mit den beiden Zweigen von γ durch P aufweist; C^3 und C^5 schneiden sich noch in einem Punkt S . Es seien dann M, N die Tangentialpunkte von S und M auf C^3 . Die Punkte S, M, N gestatten, die Punkte B von C^3 mit dem Doppelverhältnis $\lambda = (SMNB)$ zu bestimmen. Das Doppelverhältnis $\mu = (PBHQ)$, wo H der Schnittpunkt von PB mit der Inflexionsgerade von C^3 bedeutet, gestattet dann, den Punkt Q auf PB zu bestimmen. Man erhält so für die Punkte der Ebene π ein Koordinatensystem (λ, μ) , das von der Umgebung 5. Ordnung von P auf F abhängt. Dual im Bündel P ; man erhält hier eine Ebene σ , die dem Punkte S entspricht; und in σ hat man sofort einige bemerkenswerte Gerade usw. (s. auch dies. Zbl. 11, 370).

E. G. Togliatti (Genova).

Palozzi, G.: L'elemento lineare proiettivo e l'applicabilità proiettiva di nuovi reticolati dello spazio ordinario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 202—211 (1935).

Den Gegenstand der Untersuchung bilden „Netze“ im dreidimensionalen Raume, d. h. solche Systeme von Flächen, daß von jedem Punkte O eines Raumgebietes drei Flächen ausgehen, deren Tangentenebenen in O nicht einem Büschel angehören. Jedem Netze R wird projektivinvariant eine Differentialform F , das projektive lineare Element von R , zugeordnet. Man kann krummlinige Koordinaten u, v, w einführen, so daß längs jeder Netzfläche eine Koordinate konstant ist. F hat dann die Form

$$[(b\,dv - g\,dw)\,dv^2 + (c\,dv - e\,du)\,dv^2 + (a\,du - f\,dv)\,dw^2]: du\,dv\,dw.$$

Eine Korrespondenz zwischen zwei Netzen R und \bar{R} heißt uneigentliche projektive Deformation, falls für jedes Paar O und \bar{O} entsprechender Punkte eine Kollineation K existiert, so, daß $K(O) = \bar{O}$ ist und daß, wenn C und \bar{C} ein Paar entsprechender Kurven ist, wobei C den Punkt O enthält, die beiden Kurven $K(C)$ und \bar{C} im Punkte \bar{O} sich in erster Ordnung berühren, und sogar in zweiter Ordnung, falls C die Schnittlinie zweier Netzflächen ist. Die eigentliche projektive Deformation wird wörtlich ebenso definiert mit dem Unterschiede, daß gewöhnliche Berührung durch analytische Berührung im Sinne von Fubini ersetzt wird. Wenn die Korrespondenz zwischen R und \bar{R} durch gleiche Werte der krummlinigen Koordinaten u, v, w definiert ist, dann ist die Proportionalität (Gleichheit) der projektiven linearen Elemente die notwendige und hinreichende Bedingung für uneigentliche (eigentliche) projektive Deformation. Čech.

Cohn-Vossen, S.: Vollständige Riemannsche Räume positiver Krümmung. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 387—389 (1935).

Die Note behandelt das Problem, welchen topologischen Einschränkungen ein n -dimensionaler vollständiger Riemannscher Raum R_n durch die Voraussetzung unterworfen wird, daß seine sämtlichen Flächenelemente positive Gaußsche Krümmung haben. Das Hauptergebnis des Verf. besagt, daß ein solcher R_n (und daher auch jeder seiner Überlagerungsräume) höchstens einen Endpunkt im Sinne von Freudenthal (vgl. dies. Zbl. 2, 56) hat. [Unter der Voraussetzung, daß die Gaußschen Krümmungen aller Flächenelemente größer als eine positive Konstante sind, hatte Myers (vgl. dies. Zbl. 11, 225—226) gezeigt, daß der R_n geschlossen ist.] Der Beweis beruht auf folgendem Hilfssatz: In einem vollständigen Riemannschen Raum mit mindestens zwei Endpunkten gibt es eine beiderseits unendlich lange geodätische Linie, die die kürzeste Verbindung von je zwei ihrer Punkte enthält. In einem Raum positiver Krümmung kann aber eine solche, kein Paar konjugierter Punkte enthaltende Geodätische nicht existieren. — Als Folgerung des Hauptsatzes wird (ohne Beweis) angegeben, daß ein vollständiger R_n positiver Krümmung entweder geschlossen ist und endliche Fundamentalgruppe hat, oder er ist offen, besitzt genau einen Endpunkt, und jeder geschlossene Weg läßt sich stetig ins Unendliche deformieren. Für $n = 2$ ist hierin der vom Verf. schon früher (vgl. dies. Zbl. 11, 225) bewiesene Satz enthalten, daß jede vollständige Fläche positiver Krümmung der Kugel, der projektiven oder der euklidischen Ebene homöomorph ist. — Mit Hilfe seines obengenannten und des Satzes von Myers (dies. Zbl. 11, 226), daß der universelle Überlagerungsraum eines vollständigen R_n nirgends positiver Krümmung dem n -dimensionalen euklidischen Raum homöomorph ist, zeigt Verf. am Beispiel des topologischen Produktes einer Kugel und einer Geraden, daß für $n \geq 3$ (im Gegensatz zu $n = 2$) nicht jede n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit zu einem vollständigen Riemannschen Raum konstanter Krümmung gemacht werden kann. Andere Beispiele hierfür lassen sich, wie Ref. bemerkt, auf Grund der Ergebnisse von H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem [Math. Ann. 95, 313 (1926)] angeben. W. Fenchel (Kopenhagen).

Pastori, Maria: Tensori vincolati a un sistema di geodetiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 801—808 (1935).

In elastic problems for curved plates curvilinear coordinates x^1, x^2, x^3 may be

employed, x^1, x^2 being arbitrary coordinates on the mean surface and x^3 the perpendicular distance from it. The line-element is then $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + (dx^3)^2$ ($i, j = 1, 2$). The author's theory of tensors bound to a system of geodesics concerns tensor character with respect to transformations $x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, $x^3 = \bar{x}^3$. For example, if Greek suffixes have the range 1, 2, 3, the components $T_{\alpha 3}$ of a tensor $T_{\alpha\beta}$ are components of a bound vector; the covariant derivative of this bound vector is defined to be

$$T_{\alpha(3)/\gamma} = \frac{\partial T_{\alpha(3)}}{\partial x^\gamma} - T_{\lambda(3)} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \gamma \end{matrix} \right\},$$

the 3 being enclosed in brackets to avoid confusion with $T_{\alpha 3/\gamma}$, components of the usual covariant derivative. The ideas may be extended directly to the case of a Riemannian n -space, the coordinates being such that the parametric lines of one coordinate are geodesic orthogonal trajectories of the $(n-1)$ -spaces on each of which that coordinate is constant.

J. L. Synge (Toronto).

Hlavatý, V.: Zur Konformgeometrie. III. Anwendung auf die Kurventheorie. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 1006—1011 (1935).

Die vom Verf. angegebene Methode stempelt den konformen Raum, K_n , zur W_n ($= X_n$ mit einer Weylschen Übertragung) (dies. Zbl. 11, 175 u. 12, 227). Ist $x^* = x^*(t)$ eine Kurve C in K_n , so kann man mittels der Tensordichte $\mathfrak{G}_{\lambda\kappa}$ vom Gewicht $-2/n$ in jedem Punkte von C die Tangentialeinheitsvektordichte i^* vom Gewicht $1/n$ bilden. Man bekommt dann die Frenetschen Formeln

$$i^{\mu} \nabla_{\mu} i^{\kappa} = -\mathfrak{k} \quad i^{\kappa} + \mathfrak{k} \quad i^{\kappa},$$

$\begin{matrix} a & a-1 & a-1 & a & a+1 \end{matrix}$

wo i^* Einheitsvektordichten sind, die gegenseitig senkrecht sind, während die skalaren Dichten \mathfrak{k} als Krümmungen der Kurve betrachtet werden. Man kann aber auch mit dem Pseudovektor i^* der Klasse $-1/2$ (d. h. $i^* \rightarrow \sigma^{-1} i^*$, wenn der Fundamentaltensor einen Faktor σ bekommt) arbeiten. Die kovariante Ableitung eines Pseudovektors der Klasse r wird gegeben durch $\nabla_{\mu} v^{\kappa} = \partial_{\mu} v^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} v^{\lambda} + r Q_{\mu} v^{\kappa}$. Es verschwindet also die kovariante Ableitung des Fundamentaltensors, als Tensor der Klasse 1 aufgefaßt. Man erhält so die Formeln

$$\frac{dx^{\mu}}{dt} \nabla_{\mu} i^{\kappa} = -k \quad i^{\kappa} + k \quad i^{\kappa}.$$

$\begin{matrix} a & a-1 & a-1 & a & a+1 \end{matrix}$

Die i^* sind Pseudoeinheitsvektoren der Klasse $-1/2$. Die k sind nicht invariant bei einer Parametertransformation; $\int k dt$ ist invariant. Die Beziehungen zwischen den k und den \mathfrak{k} sind angegeben. Es wird ein konforminvarianter Kurvenparameter abgeleitet. Da nicht benutzt wird, daß Q_{μ} Gradient ist, kann man diese Methode auch für Kurven in einer beliebigen W_n anwenden.

J. Haantjes (Delft).

Mutô, Yosio, and Kentaro Yano: On the connections in X_n associated with the points of Y_m . Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 379—390 (1935).

Jedem Punkte y^a ($a, b, c = 1, \dots, m$) einer Mannigfaltigkeit Y_m wird eine Mannigfaltigkeit X_n adjungiert, welche auf die Koordinaten x^{ν} ($\nu, \lambda, \mu = m+1, \dots, m+n$) bezogen ist. Zur Definition der Größen werden in üblicher Weise folgende Gruppen benutzt:

$$\begin{aligned} \bar{y}^a &= \bar{y}^a(y), \quad \bar{x}^{\nu} = x^{\nu} && \text{für Größen in } Y_m, \\ \bar{y}^a &= y^a, \quad \bar{x}^{\nu} = \bar{x}^{\nu}(x) && \text{für Größen in } X_n, \\ \bar{y}^a &= y^a(y), \quad \bar{x}^{\nu} = \bar{x}^{\nu}(x, y) && \text{für Größen in } Z_{m+n} \equiv X_n + Y_m. \end{aligned}$$

Die Abbildung benachbarter X_n wird dem Gesetze $dx^{\nu} = -\Gamma_a^{\nu} dy^a$ entnommen. Daraus entspringen Formeln für das kovariante Differential der Größen. Z. B. gilt für einen kovarianten Vektor die Formel

$$\dots \delta v^{\nu} = (V_{\mu} v^{\nu}) \delta x^{\mu} + (D_a v^{\nu}) dy^a,$$

$$\delta x^{\nu} = dx^{\nu} + \Gamma_a^{\nu} dy^a, \quad V_{\mu} v^{\nu} = \partial_{\mu} v^{\nu} + v^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}(x, y), \quad D_a v^{\nu} = \partial_a v^{\nu} + v^{\lambda} \partial_{\lambda} \Gamma_a^{\nu} - \Gamma_a^{\lambda} \partial_{\lambda} v^{\nu}$$

gesetzt wird. Mittels dieser Formeln gelangt man zur Verallgemeinerung der üblichen Umkreisungstheoreme. Die hier aufgestellte Theorie umfaßt auch einige weniger allgemeine Fälle, welche teilweise von anderen Autoren schon betrachtet wurden. (Vgl. auch von Yano: dies. Zbl. 10, 38, 420; 11, 420.) Hlavatý (Praha).

Topologie :

Bassi, Achille: Su di una notevole operazione topologica tra complessi. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 73, 49—90 (1935).

Die im Titel angedeutete Operation wird im allgemeinen mit „Verbindung“ (join, collegamento), gelegentlich auch mit „Produkt“ bezeichnet, ist aber von dem „topologischen Produkt“ schon hinsichtlich der Gleichung für die Dimension verschieden. — Es werden Sätze über diese Verbindung abgeleitet und insbesondere die Basis der Homologiegruppe der Verbindung zweier Komplexe bestimmt, wenn Basen der Homologiegruppen der beiden Komplexe gegeben sind. Friedrich Levi (Calcutta).

Vietoris, Leopold: Berichtigung meiner in Nr. 15 erschienenen Mitteilung „Gruppen mehrdimensionaler Wege“. Anz. Akad. Wiss., Wien 1935, 208 (Nr 19).

Die „Gruppen mehrdimensionaler Wege“, die Verf. a. a. O. definiert hat, sind — in Berichtigung der früheren Behauptung des Verf. — kommutativ und mit den Homotopiegruppen von Hurewicz inhaltlich identisch. Deshalb unterbleibt die vom Verf. a. a. O. angekündigte ausführliche Darstellung seiner Resultate. (Vgl. dies. Zbl. 12, 228.) Alexandroff (Moskau).

Basye, R. E.: Concerning two internal properties of plane continua. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 670—674 (1935).

Verf. beweist folgende zwei Sätze: 1. Es seien H und K zwei punktfremde, abgeschlossene Teilmengen eines kompakten ebenen Kontinuums M ; wenn je zwei Punkte $A \subset H$ und $B \subset K$ in M durch die Summe endlich vieler (von A und B abhängender) Teilkontinua von M getrennt werden können, so können H und K in M durch die Summe endlich vieler Teilkontinua von M getrennt werden. 2. Es sei M ein Teilkontinuum der Ebene oder der Sphäre und Z eine (evtl. leere) Teilmenge von M ; es seien G_i endlich viele zusammenhängende Teilmengen von M derart, daß $Z + \sum G_i$ zwei Punkte A und B von M in M schwach trennt (d. h. jede zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge $\supset A + B$ von M hat mit $Z + \sum G_i$ einen nichtleeren Durchschnitt). Gibt es nun für die natürliche Zahl r eine r -punktige Menge, die mit jeder Menge G_i einen nichtleeren Durchschnitt hat, so existieren unter den G_i sicher $2r$ Mengen G'_i , so daß schon $Z + \sum G'_i$ die Punkte A und B in M schwach trennt. Nöbeling.

Reid, W. T.: A certain three-dimensional continuum. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 683—684 (1935).

Verf. konstruiert im euklidischen R_3 ein kompaktes Kontinuum M und darin einen Punkt A und ein Teilkontinuum G von $M - A$, so daß A und G in M nicht durch die Summe endlich vieler zusammenhängender Teilmengen von M getrennt werden können, obwohl $M - A$ zwei Teilkontinua K_1 und K_2 enthält, so daß erstens $M - K_i$ ($i = 1, 2$) Summe zweier fremder zusammenhängender Mengen ist und zweitens A von jedem Punkt von G durch K_1 oder K_2 getrennt ist. (Vgl. hierzu Basye, vorst. Ref.) Nöbeling (Erlangen).

Reid, W. T.: A theorem on plane continua. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 684—688 (1935).

Verf. zeigt: Ist M ein Kontinuum der Ebene (zusammenhängende, abgeschlossene Menge; Kompaktheit wird nicht verlangt) und K ein echtes Teilkontinuum von M , so hat mindestens eine Komponente von $M - K$ einen Häufungspunkt in K . — Nach J. H. Roberts ist dieser Satz im R_3 falsch. Nöbeling (Erlangen).

Alexandroff, Paul: Die A-Mengen und die topologische Konvergenz. Fundam. Math. 25, 561—567 (1935).

The so called A -operation on a system of sets $[E_{i_1, i_2, \dots, i_k}]$ is effected by taking the product $\prod E_{i_1, \dots, i_k}$ for each sequence of indices i_1, i_2, \dots and then summing

for all such sequences; and the sets $A[E_{i_1}, \dots, i_k]$ so generated by the operation A on systems of closed and open sets are the A -sets or Suslin sets. The author considers the question of what types of sets could be obtained if one substitutes some other operation for that of taking products in defining the A -operation. He proves in particular that, under the hypothesis that the space is metric and separable, the substitution of the operation of passing to the upper topological limit or of passing to the lower topological limit yields in either case only A -sets and indeed yields all of these. In the author's result the sets E_{i_1}, \dots, i_k are arbitrary, it being unnecessary to restrict them on account of the operation being considered. The converse result is strengthened somewhat by showing that every A -set may be represented in the form $A_i[e_{i_1}, \dots, i_k]$, where each of the sets e_{i_1}, \dots, i_k reduces to a single point, where the sets $e_{i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots$ converge to a single point for each sequence of integers i_1, i_2, \dots , and where A_i denotes the operation obtained by substituting the operation of passing to the topological limit for product taking in the A -operation. *G. T. Whyburn.*

Borsuk, Karol: Contribution à la théorie de la dimension. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1086—1087 (1935).

Verf. definiert eine Klasse (Δ) von kompakten F , die alle Polyeder enthält und die Eigenschaft hat, daß für jedes Kompaktum dieser Klasse die Dimension modulo m (im Sinne des Ref.) für jedes $m \geq 2$ mit der Brouwerschen Dimension zusammenfällt. Die Klasse (Δ) wird durch folgende lokale Eigenschaft definiert, von der verlangt wird, daß sie für jeden Punkt p von F gilt: Zu jeder Umgebung $U(p)$ existiert eine Umgebung $U_0(p)$ derart, daß jede r -dimensionale, abgeschlossene Menge $A \subset U_0(p)$, $0 \leq r \leq \dim F$, sich in einer höchstens $(r+1)$ -dimensionalen Teilmenge von $U(p)$ auf einem Punkt zusammenziehen läßt. Die Note enthält Beweisskizzen dafür, daß jedes Polyeder zur Klasse (Δ) gehört, sowie daß für jedes Kompaktum der Klasse (Δ) alle Modulardimensionen mit der Brouwerschen Dimension übereinstimmen. *P. Alexandroff (Moskau).*

Sierpiński, W.: Sur la notion d'homogénéité des espaces métriques. C. R. Soc. Sci. Varsovie **28**, 17—20 (1935).

Man nennt einen metrischen Raum E homogen, wenn für jedes Paar a, b von Punkten aus E eine isometrische Selbstabbildung von E existiert, die a in b überführt (Urysohn, Fundam. Math. **9**, 121). Verf. nennt E in diesem Falle einfach homogen und führt einen neuen Begriff ein: er nennt E vollständig homogen, wenn zu je zwei isometrischen Mengen P und Q von E eine isometrische Selbstabbildung von E auf sich existiert, die P in Q überführt. Gilt dies wenigstens für je zwei isometrische Mengen der Mächtigkeit m (m eine beliebige Kardinalzahl), so nennt er E homogen von der Ordnung m . Durch Beispiele wird gezeigt, daß ein einfach homogener Raum nicht vollständig homogen sein muß, und daß ein Raum mit einer Mächtigkeit $m \geq \aleph_0$ von jeder Ordnung $n < m$ homogen sein kann, ohne homogen von der Ordnung m zu sein. *Nöbeling (Erlangen).*

Hausdorff, F.: Gestufte Räume. Fundam. Math. **25**, 486—502 (1935).

A set E in which for each subset A there is associated a second set A_1 in such a way that all of the Kuratowski axioms in terms of the closure of a set except $A_{11} = A_1$ are satisfied is called a graduated (gestufter) space, i.e., $O_1 = O$, $A \subset A_1 \subset E$, $(A + B)_1 = A_1 + B_1$, $x_1 = x$. The author calls a set E a topological space provided there is in it a system of sets called closed sets satisfying: (1) E and the null set are closed, (2) the sum of two closed sets is closed, (3) the product of any number of closed sets is closed, and (4) a single point is a closed set. The author makes a detailed study of graduated spaces and their relations to topological spaces and to the spaces L of Fréchet. It is shown that every Fréchet L -space generates a graduated space and on the other hand every graduated space generates a topological space, so that the graduated spaces appear as a transition step between L -spaces and topological spaces. So called continuous decompositions of topological spaces E also are studied

in this connection. A decomposition $E = \sum_y^H E_y$ of E into disjoint non-vacuous sets E_y is said to be continuous provided the set H of these sets E_y may be made into a topological space in such a way that the transformation $y = \varphi(x)$ (equivalent to $x \in E_y$) is continuous. For this to be possible it is necessary and sufficient that the sets E_y be closed. The author considers the various ways in which this can be done. A transformation of E into H is defined as being bi-continuous (doppelstetig) provided the transform of every closed set is closed and the inverse of every closed set is closed. These transformations are investigated in connection with bi-compactness and other properties.

G. T. Whyburn (Virginia).

Mechanik.

● Nielsen, Jakob: Vorlesungen über elementare Mechanik. Übers. u. bearb. v. Werner Fenchel. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, F. K. Schmidt u. B. L. van der Waerden. Bd. 44.) Berlin: Julius Springer 1935. X, 500 S. u. 164 Abb. RM. 38.—.

This work, which is distinguished by careful explanations and numerous excellent diagrams, is shorter and less advanced than the well-known large treatises on rational mechanics, such as those of Appell, or Levi-Civita and Amaldi; for instance, it does not include the Hamiltonian theory, or (except for a brief mention on page 330) non-holonomic systems. A new and valuable feature is the elegant treatment of the problem of linkages, which is made to depend on the determination of the rank of matrices. The scope of the book will be understood from the following list of chapter-headings. 1. Vectors and Matrices. 2. Equilibrium of particles. 3. Systems of vectors. 4. Equilibrium of bodies. 5. Graphical statics. 6. Statics of linkages. 7. Velocity and acceleration. 8. Motion of bodies. 9. Kinematics of linkages. 10. The equation of work. 11. Relative motion. 12. Foundations of dynamics. 13. Rectilinear motion. 14. Potential-theory. 15. Motion of a particle in special fields of force. 16. Constrained motion of a particle. 17. General principles in the motion of bodies. 18. Tensors. 19. Motion of rigid bodies. 20. Impact. 21. Equilibrium and motion of flexible strings.

Whittaker (Edinburgh).

Sestini, Giorgio: De Pendulis. Period. Mat., IV. s. 15, 263—275 (1935).

Chaikin, S. E.: Über den Einfluß kleiner Parameter auf den Charakter der stationären Zustände eines dynamischen Systems. Z. techn. Physik, Leningrad 5, 1388 bis 1407 (1935) [Russisch].

Verf. untersucht die Stabilität der Gleichgewichtszustände dynamischer Systeme gegen kleine Veränderungen der Differentialgleichungen. Besonders untersucht er den Fall, wo kleine Glieder, die Ableitungen höherer Ordnung als die, die in den ursprünglichen Gleichungen vorkamen, enthalten (Vergrößerung der Zahl der Freiheitsgrade). Es wird besonders die physikalische Seite ins Auge gefaßt. Es werden Beispiele diskutiert.

A. Andronoff; A. Witt (Moskau).

Scorza Dragoni, G.: A proposito di alcuni teoremi di media che si incontrano nella dinamica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 113—119 (1935).

Sich an frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 11, 135 u. 373) anschließende Bemerkungen zum Birkhoffschen Ergodensatz.

Wintner (Baltimore).

Thomson, J. F.: A type of oscillation within the helium atom. Amer. Math. Monthly 42, 487—496 (1935).

Berechnung der charakteristischen Exponenten der kleinen Schwingungen um equilaterale Gleichgewichtslagen bei gleichzeitiger Berücksichtigung der elektrischen und der Gravitationskräfte.

Wintner (Baltimore).

Wachtl, O.: Die Flächensätze der Dreikörperbewegung in der Newtonschen Mechanik. *Astron. Nachr.* **257**, 45—48 (1935).

Die Betrachtungen des Verf. sind in einer ihm entgangenen Arbeit von B. De-launay (1904) enthalten (vgl. S. 398—401 des Heidelberger Kongreßberichts; wegen der sich daran anschließenden Literatur vgl. z. B. dies. Zbl. **2**, 415 und **9**, 234). Der Verf. schreibt in dem fraglichen Koordinatensystem auch die Flächensätze hin, wozu der Referent bemerken muß, daß bei Lösungen, die keine Lagrangesche Lösungen sind, Schwerpunkt und Kraftzentrum des Dreikörpersystems voneinander wohl zu unterscheiden sind.

Wintner (Baltimore).

Graffi, D.: Ancora sull'effetto di una variazione di massa su un'orbita planetaria. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **22**, 55—59 (1935).

The author obtains results similar to those of a previous article (this Zbl. **11**, 373) under different and less restrictive hypotheses. The mass of the planet is assumed to vary on account of the emission of particles from it as well as on account of the fall of particles on it.

D. C. Lewis (Ithaca, N.Y., U.S.A.).

● **Sudria, J.:** L'action euclidienne de déformation et de mouvement. *Mém. Sci. math. Fasc.* **29**, 56 pag. (1935).

This tract is concerned with a theory of deformable bodies, in which the deformations are not restricted to be infinitesimal, and the actions on a material element are not supposed to be equivalent necessarily to a single force, but may also involve a couple: it is based chiefly on the *Théorie des corps déformables* of E. and F. Cosserat, though with considerable changes in the mode of exposition, especially as regards the use of vector notation and the notions of energy and force. The theory is made to depend on a scalar function of geometrical and kinetic arguments, which remains invariant when these arguments are subjected to a transformation belonging to the group of Euclidean displacements, i.e. when the body, supposed momentarily rigid, experiences an elementary screw-displacement. Considering first the deformation of curves, the energy of deformation (with sign reversed) is called the action per unit length: the variation of the action when the curve is deformed gives the work done by the applied forces. In the general case (deformation and motion) the action is of the dimensions energy \times time, and is (with sign reversed) the integral of the kinetic potential. The theory is extended to surfaces and three-dimensional bodies; and applications to models of the aether, such as those of MacCullagh and Lord Kelvin, are indicated. Whittaker (Edinburgh).

Baumann, Hellmut: Zur Verwendung von Operatoren in der Kontinuumsdynamik. *Ann. Physik*, V. F. **24**, 49—83 (1935).

This expository paper discusses mechanical problems by the methods of the Heaviside operational calculus and makes use of a terminology (resistance etc.) suggested by the analogous electrical problems. The vibrations of a finite rod are discussed by first treating the semi-infinite rod and then introducing the reflected waves. Several examples are treated in detail and tables of some of the functions occurring are given; for example the function

$$F_1(z) = \cos \frac{\pi}{2} z^2 + \sin \frac{\pi}{2} z^2 + \pi z S(z) - \pi z C(z)$$

$$\left(\text{where } S(z), C(z) \text{ are the Fresnel integrals: } S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} \alpha^2 d\alpha, C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} \alpha^2 d\alpha \right)$$

is tabulated to four decimal places for all tenths of a unit from $z = 0$ to $z = 5$. The paper finishes with a discussion of the vibrations of a piano string. Murnaghan.

Woronetz, Constantin: Mouvements des fluides en couches minces sur des surfaces courbes. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, III. s. **26**, 1—64 (1934).

Soit $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ l'élément de la surface considérée. A tout mouvement d'un liquide parfait correspond un mouvement dans le plan u, v conservant les lignes de courant $\psi = \text{const}$, les vitesses étant en rapport 1 : λ . L'auteur considère les mouvements discontinus sur des surfaces développables ($\lambda = \text{const}$), en particulier le mouvement sur un cylindre circulaire en présence de deux obstacles-ségments parallèles aux génératrices, le sillage pouvant présenter une zone tourbillonnaire. Ces problèmes peuvent être résolus en fonctions elliptiques. Le problème général, posé par la théorie

de Helmholtz, consiste dans la détermination de ψ , les valeurs de ψ et de $\frac{d\psi}{dn}$ étant connues sur les lignes de jet non données qui se détachent d'un obstacle donné, sur lequel on a $\psi = \text{const.}$ L'auteur désigne avec Riabouchinsky, ce problème par le nom de „problème mixte-inverse“, mais ne considère en réalité que le problème où on se donne a priori l'image de l'obstacle et des lignes de jet dans le plan du potentiel complexe („problème mixte direct“, problème considéré dans le plan par Levi-Civita et Villat). Signalons qu'il est erroné de croire que le problème inverse puisse se ramener par des considérations élémentaires au problème direct. L'auteur donne les équations du problème direct en se servant de la méthode Signorini-Demtchenko et en donne une solution approchée pour λ voisin de 1. Les travaux concernant la résolution du problème de Helmholtz pour le cas du plan (dit „problème mixte-inverse“) semblent avoir échappé à l'attention de l'auteur. (Voir pour la bibliographie: A. Weinstein: Sur les conditions aux limites introduites par l'Hydrodynamique, Conférences Internationales de Mathématiques. Genève: L'Enseignement Mathématique 1936.) Weinstein (Genf).

Astronomie und Astrophysik.

Vescan, Théophile: Une formule de la réfraction astronomique déduite de la forme parabolique du trajet lumineux. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 6, 88—90 (1935).

Möller, Jens P., und H. Q. Rasmusen: Tafel der Funktion $x^{2/3}$ zur Verwendung bei parabolischer Bahnbestimmung nach der Methode von B. Strömgren. Astron. Nachr. 258, 9—10 (1935).

Jeans, James: The size and age of the universe. Nature 137, Suppl. to Nr 3453, 17—28 (1936).

Jahn, W.: Über die Temperatur- und Dichteverteilung in der Sonnenphotosphäre und im Sonnenfleck. Astron. Nachr. 258, 33—38 (1936).

Cowling, T. G.: The structure of sunspots. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 15—20 (1935).

Es wird ein Überblick gegeben über die bisherigen Anschauungen über den Aufbau eines Sonnenflecks, nach denen ein solcher ein aufsteigender Gasstrom ist, verbunden mit adiabatischer Abkühlung. Als Tiefe der Flecken hatte man etwa 100 km geschätzt. Verf. zeigt nun durch numerische Integration der Gleichungen des Strahlungsgleichgewichts, wo die Schichten liegen, in denen für das Entstehen von Konvektion günstige Bedingungen herrschen. Ferner schätzt er ab, in welcher Tiefe der Energietransport durch Konvektion den durch Strahlung überwiegt. Er erhält hierfür beträchtlich größere Tiefen, als vorher angenommen. In der Photosphäre überwiegt der Energietransport durch Strahlung, wodurch das Beobachtungsergebnis verständlich wird, daß an der Oberfläche eines Flecks Strahlungsgleichgewicht herrscht. Zum Schluß untersucht Verf. noch die Richtung der Strömungen im Fleck und findet, daß die Bewegung abwärts gerichtet sein müsse. (Vgl. auch Siedentopf, Astron. Nachr. 255, 157; dies. Zbl. 11, 182.) Klauder (Jena).

Eddington, A. S.: Note on „relativistic degeneracy“. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 20—21 (1935).

In Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 194 (dies. Zbl. 11, 182) hatte Verf. gezeigt, daß die übliche Formel für den Druck in einem relativistisch entarteten Gas nicht richtig ist. Die vorliegende Bemerkung richtet sich gegen eine verbesserte Ableitung der gleichen Formel von Møller und Chandrasekhar (Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 673; dies. Zbl. 12, 137). Auch sie ist nicht einwandfrei, da die Ausgangsannahmen über Lage und Impuls eines Elektrons der Unbestimmtheitsrelation widersprechen. Klauder (Jena).

Biermann, L.: Konvektion im Innern der Sterne. *Astron. Nachr.* **257**, 269—294 (1935).

This continues the author's previous work on convection in stars (this Zbl. 5, 327), from which it follows that the temperature gradient in a star cannot appreciably exceed the adiabatic value, since any tendency to do so would be prevented by the setting-up of turbulent energy-transport (Scheinleitung). An introductory section is devoted to a general discussion of this effect. It is then applied to a discussion of Eddington's "standard model". By allowing for convective transport, it is shown that there is a one-parameter set of solutions, given by the dependence of radiation pressure on total pressure, instead of the unique solution found by Eddington corresponding to a unique relation between the pressures, when the condition that both pressures should vanish at the boundary is imposed. He further shows however that the requirement of secular stability leads to models in which there is a core in radiative equilibrium, surrounded by an envelope in convective equilibrium. If there is convective equilibrium throughout, the star is secularly unstable. The existence of the core can also preclude too great a departure from Eddington's mass-luminosity law. The author then extends his work to two other stellar models which are designed to show the consequences of different distributions of energy-sources and the dependence of energy-generation on other parameters. They lead however to the same general conclusion as to the importance of convective transport in stars. Lastly the different ways in which such transport may be set up in a non-rotating star are summarised.

W. H. McCrea (London).

Tiercy, Georges: Considérations sur le caractère polytropique de l'équilibre thermodynamique stellaire. *Arch. Sci. Physiques etc.* **17**, 340—360 (1935).

In der Arbeit gibt Verf. zu einigen bekannten Sätzen der Theorie polytroper Gaskugeln ergänzende Erweiterungen und Ableitungen. Er beweist zuerst, daß bei konstantem β (= Gasdruck/Gesamtdruck) der Polytropenindex n notwendig den Wert 3 annehmen muß und umgekehrt, und zeigt dann, daß in allen polytropen Fällen die grundlegende Diff.-Gleichung vom gleichen Typus ist. Die Untersuchung eines veränderlichen β ergibt eine Beziehung zwischen der Dichte ρ und β , die bei polytropem Aufbau erfüllt sein muß. Die anschließenden Ausführungen beschäftigen sich mit der Bestimmung der Konstanten des Problems und der Mittelpunktswerte der Veränderlichen.

Klauder (Jena).

Zwicky, F.: Remarks on the redshift from nebulae. *Physic. Rev.*, II. s. **48**, 802 bis 806 (1935).

Nach einigen kritischen Bemerkungen gegen die Theorie der sich ausdehnenden Welt wird eine allgemeine „statistische“ Theorie für die Rotverschiebung in den Spektren der außergalaktischen Objekte entwickelt. Ein mit der Energie $h\nu_0$ emittiertes Lichtquant treffe auf der Wegstrecke D bis zum Beobachter auf n äquidistante Punkte, an denen es jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p eine kleine Energieverminderung $h\delta$ erfährt. Am Ziel wird dann mit der Wahrscheinlichkeit $I_i^{(n)} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ eine verminderte Energie $h(\nu_0 - i\delta)$ eintreffen, d. h. ursprünglich monochromatisches Licht der Frequenz ν_0 wird in die Frequenzen $\nu_0 - i\delta$ mit den relativen Intensitäten $I_i^{(n)}$ aufgespalten ($i = 0, 1, \dots, n$). Wenn $\frac{np}{1-p} < 1$, so ist $I_{i+1}^{(n)} < I_i^{(n)}$; die maximale Intensität bleibt also in ν_0 . Eine Linienverschiebung tritt dagegen ein, wenn mindestens $I_1^{(n)} > I_0^{(n)}$ oder $\frac{np}{1-p} > 1$ ist. Folgende drei Unterfälle werden näher behandelt: 1. $p = 1$, also $I_0 = I_1 = \dots = I_{n-1} = 0$, $I_n = 1$, d. h. es tritt Frequenzverminderung um $\Delta\nu = n\delta$ ohne Linienverbreiterung ein. Die Theorie der sich ausdehnenden Welt fällt in diese Kategorie. — 2. $p = \text{konst.} < 1$ und gleichzeitig $\lim n = \infty$, $\lim \delta = 0$ derart, daß $n\delta = \Delta\nu(D)$ endlich bleibt. Außer einer Linienverschiebung vom Betrage $p \cdot \Delta\nu(D)$ tritt auch eine Linienverbreiterung ein, deren Betrag im Ver-

hältnis zur Verschiebung aber mit $n^{-\frac{1}{2}}$ abnimmt; für große Entfernungen ist daher die Verbreiterung unwesentlich. Unter diesen Fall gehört die früher vom Verf. [Proc. Nat. Acad. Sci. 15, 773 (1929)] als Ursache der Rotverschiebung vorgeschlagene „Gravitationsreibung“ des Lichtes. — 3. $\delta = \text{konst.}$ und gleichzeitig $\lim n = \infty$, $\lim p = 0$ derart, daß $np = P(D) > 1$. Dieser Fall umfaßt Deutungen der Rotverschiebung durch Wechselwirkung der Lichtquanten mit Elektronen oder Atomen (z. B. Comptoneffekt, Ramaneffekt). Das Resultat ist ähnlich wie im vorigen Fall eine Linienverschiebung um $\delta \cdot P(D)$ und eine Linienverbreiterung, die für große Entfernungen unmerklich wird. — Aus der Beobachtung der Linien allein ist eine Entscheidung zwischen den drei Fällen nicht möglich, doch schließt die physikalisch mit den Voraussetzungen von 3. verbundene Streuung des Lichtes diesen Fall praktisch aus. Wempe (Göttingen).

Hubble, Edwin, and Richard C. Tolman: Two methods of investigating the nature of the nebular red-shift. *Astrophys. J.* 82, 302—337 (1935).

The usual relativistic theory of the expanding universe provides expressions for the red-shift of light from distant nebulae, and also for the apparent size, luminosity, and number-density of these nebulae assuming then all to be similar objects. Theoretical relations between these quantities can therefore be derived. Such relations cannot however be used immediately for testing the theory by comparison with observation. For the nebulae do not possess well-defined boundaries so that their "sizes" are not easily determined, only the apparent photographic and not bolometric magnitudes are observed, and their intrinsic properties are not all similar but their absolute magnitudes appear to be distributed according to a Gaussian law about a mean value. The first part of the paper is concerned with showing in detail how to correct the original formulae so as to allow for these effects. The object is to get on observational means of distinguishing between these results, which may be said to depend on the recessional explanation of the red-shift, and those depending on other possible explanations. As a standard of comparison corresponding results are therefore worked out for a static Einstein universe in which, for some (unknown) physical reason the light from a nebula is reddened by an amount proportional to its proper distance from the observer. This is supposed to take place without deflection of the light. The main difference between the two sets of formulae lies in the different powers to which the reddening factor occurs. A concluding section gives a critical review of the present state of the observational work. The first conclusion is that both theories give the same law of variation of size of nebular images with apparent magnitude. At the present stage it seems necessary to go to counts of nebulae in order to discriminate between the theories. These lead to the very provisional result that, while the observations on numbers of nebulae cannot be explained by the hypothesis of stationary nebulae in euclidean space with no red-shift to cut down the luminosity of the more distant ones, they might be explained either by the static model with the assumed red-shift and with no absorption of light, or by the recessional model. In the latter case however the curvature of space would have to be unexpectedly large, indicating a higher mean density of matter in the universe than is usually supposed to exist. The paper itself should be consulted for its very thorough discussion of the theoretical and observational difficulties of the subject. W. H. McCrea (London).

Lambrecht, H., und H. Siedentopf: Die Verteilung diffuser Materie im Felde eines Sternhaufens. *Astron. Nachr.* 257, 333—340 (1935).

Die sternarme Ringzone, die einige offene Sternhaufen zu umgeben scheint, kann entweder durch eine reelle Sternleere [zur dynamischen Deutung dieses Falles vgl. O. Heckmann und H. Siedentopf, *Z. Astrophys.* 1, 67—97 (1930)] oder durch Absorption verursacht sein. Zur Klarstellung der zweiten Möglichkeit wird für ein bestimmtes (isothermes) Haufenmodell die (als stationär angenommene) Dichteverteilung von kleinen Partikeln unter dem Einfluß von Gravitation und Strahlungs-

druck des Haufens und des allgemeinen Sternfeldes abgeleitet. Da das Verhältnis von Schwerkraft zu Strahlungsdruck vom Teilchendurchmesser abhängt, tritt eine Sedimentation der diffusen Materie in der Weise ein, daß sich die grobe Materie durch die überwiegende Schwere zum Haufenmittelpunkt konzentriert, während die kleinsten Teilchen eine nach außen monoton zunehmende Dichte zeigen. Dagegen ergibt sich für Teilchen von einigen μ Durchmesser die Stelle verschwindender Kraft, also maximaler Dichte unter den gewählten Voraussetzungen etwas außerhalb der Haufen-grenze, so daß eine Deutung der beobachteten Ringzone durch Absorption möglich erscheint.

Wempe (Göttingen).

Quantentheorie.

Bohr, N.: Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physic. Rev.*, II. s. 48, 696—702 (1935).

Es wird die Ungeeignetheit des von Einstein, Podolsky und Rosen [*Physic. Rev.* 47, 777 (1935); dies. Zbl. 12, 42] aufgestellten physikalischen Wirklichkeitskriteriums für die in der Quantentheorie vorliegende Situation nachgewiesen. In diesem Zusammenhang wird etwas näher auf den Standpunkt der Komplementarität eingegangen, von dem aus die quantenmechanische Naturbeschreibung innerhalb ihres Anwendungsgebiets alle berechtigten Forderungen an Vollständigkeit erfüllt. *Klein.*

Schrödinger, E.: Discussion of probability relations between separated systems. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 555—563 (1935).

Durch eine eingehende mathematische Untersuchung der Kopplung und Entkopplung von zwei quantenmechanischen Systemen wird das von Einstein, Podolsky und Rosen (dies. Zbl. 12, 42) betrachtete quantentheoretische Paradoxon verschärft. Vgl. die von Bohr gegebene Auflösung des Paradoxons (vgl. vorst. Referat). S. auch Ruark (dies. Zbl. 12, 284).

O. Klein (Stockholm).

Schrödinger, E.: Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwiss.* 23, 807—812, 823—828 u. 845—849 (1935).

Referat über die physikalische Deutung der Quantenmechanik. Die Unmöglichkeit einer über die in der ψ -Funktion enthaltenen Aussagen hinausgehende Kenntnis physikalischer Größen und die Abhängigkeit der Bedeutung der ψ -Funktion vom Beobachter wird durch Betrachtung des Prozesses der Zusammenfügung getrennter Systeme (z. B. Meßobjekt und Meßapparat) im quantenmechanischen Formalismus im einzelnen nachgewiesen. Verf. kennzeichnet diese Situation als unbefriedigend und fragt, ob nicht eine Abänderung möglich wäre durch einen Verzicht auf den Begriff des Wertes einer physikalischen Größe zu einem (scharf) bestimmten Zeitpunkt. (Wäre aber eine grundsätzliche Änderung in der Deutung der Qu.M. durch einen solchen Vorschlag mit dem Korrespondenzprinzip vereinbar? Ref.) v. Weizsäcker.

Fernandez Mier, Francisco: Gedanken über Wellenmechanik. *An. Asoc. españ. Progr. Ci.* 2, 531—548 (1935) [Spanisch].

Gemeinverständliche Darstellung der Grundgedanken der Wellenmechanik.

Bechert (Gießen).

Araki, Gentaro: Note on the approximate solution of Dirac's equation by the perturbation method. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A* 3, 1—16 (1935).

Die Methode von Sommerfeld und Maue zur näherungsweisen Lösung der Diracgleichung (dies. Zbl. 11, 330) wird für die näherungsweise Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen bei beliebigem Zentralfeld verwendet. Am Schluß Anwendung der Methode auf die Paulische Spingleichung.

Bechert (Gießen).

Hermann, H.: Herleitung der Paulischen Form des Laplaceschen Operators. *Z. Physik* 97, 667—668 (1935).

Sevin, Émile: Sur les relations géométriques que présentent les particules matérielles. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 1466—1468 (1935).

Baber, W. G., and H. R. Hassé: The two centre problem in wave mechanics. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 564—581 (1935).

Es seien μ, λ, φ elliptische Koordinaten zu zwei Atomkernen (Ladungen $Z_1 e, Z_2 e$) im Abstand R als Brennpunkten. Die Schrödingergleichung für die Bewegung eines Elektrons im Feld dieser Kerne kann bekanntlich separiert werden:

$$\varphi = f(\lambda) \varphi(\mu) e^{\pm i m \varphi}$$

Für gleiche Kerne ($Z_1 = Z_2$) sind Näherungsformeln für die Funktionen f und φ und die Eigenwerte bereits von Hylleraas [Z. Physik **71**, 739 (1931); dies. Zbl. **2**, 427] und Jaffé [Z. Physik **87**, 535 (1934); dies. Zbl. **8**, 283] angegeben worden. Die Arbeit geht nicht wesentlich hierüber hinaus. Durch den Ansatz

$$\varphi(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} e^{p\mu} \sum_0^\infty a_n (1 - \mu)^n$$

$$f(\lambda) = (1 + \lambda)^\sigma e^{-p\lambda} \sum_0^\infty c_n \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^n,$$

wobei

$$p^2 = -\frac{m R^2}{\hbar^2} \left(E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \right) \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{(Z_1 + Z_2) R}{2 p} - m - 1$$

kommt man auf eine dreigliedrige Rekursion für die a_n und c_n , so daß man für den Separationsparameter A als Funktion von p eine Kettenbruchentwicklung herleiten kann. Da A in den beiden Gleichungen für φ und f den gleichen Wert haben muß, hat man beide Kettenbrüche einander gleichzusetzen und kann daraus p berechnen. Es wird gezeigt, daß die Näherung für große R anschließt an die Eigenfunktionen und Eigenwerte einzelner Atome im homogenen elektrischen Felde. — Wesentlich neu sind die für ungleiche Kerne ausgeführten Rechnungen. Die üblichen Ansätze führen hier auf unbrauchbare viergliedrige Rekursionen. Den Verff. gelingt es, mit dem Ansatz

$$\varphi(\mu) = e^{p\mu} \sum_{n=m}^\infty c_n P_n^m(\mu),$$

$f(\lambda)$ wie oben, wieder auf eine dreigliedrige Rekursionsformel zu kommen und die üblichen Kettenbruchentwicklungen durchzuführen. Es folgen Näherungsformeln für große und kleine Kernabstände R . Das Beispiel $Z_1 = 2, Z_2 = 3$ wird numerisch behandelt.

S. Flüge (Leipzig).

Sauter, Fritz: Zur Lösung der Dirac-Gleichung für ein zentralsymmetrisches Kraftfeld. Z. Physik **97**, 777—784 (1935).

Aus Diracs Gleichung für ein Elektron in einem zentralsymmetrischen Kraftfeld werden die Winkel ohne Bevorzugung einer besonderen Richtung eliminiert und die Lösung in drehinvarianter Form dargestellt.

O. Klein (Stockholm).

Grönblom, B. O.: Über singuläre Magnetpole. Z. Physik **98**, 283—285 (1935).

Die isolierten Magnetpole, deren Existenzmöglichkeit Dirac bewiesen hat, sind durch „Knotenlinien“ der Wellenfunktion eines Elektrons mit dem unendlich Fernen verbunden; die physikalisch meßbaren Größen müssen aber von der Lage dieser Knotenlinien unabhängig sein. Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zum tatsächlichen Nachweis dieser Unabhängigkeit.

P. Jordan (Rostock).

Solomon, Jacques: Sur l'absorption dans la matière des particules de grande énergie. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1110—1112 (1935).

Nach der Diracschen Löchertheorie existiert eine Polarisierung des Vakuums, die zu Abweichungen von den Maxwell'schen Gleichungen führt. Verf. bestimmt nun die Änderung, die die Formeln für Paarschöpfung und Bremsstrahlung erfahren, wenn man annimmt, daß das auf ein schnelles Elektron wirkende Feld eines ruhenden Kerns in der aus der Polarisierung des Vakuums folgenden Weise modifiziert wird. Für die Paarschöpfung in Blei durch γ -Strahlen von 5×10^6 eV findet er eine Verkleinerung von 25%.

Casimir (Leiden).

Kronig, R. de L.: Zur Neutrinotheorie des Lichtes. III. *Physica* 2, 968—980 (1935).

Es werden die Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 12, 182) über den Jordan-schen Neutrino-Strahlungsfeldformalismus weitergeführt, wobei besonders die Frage allgemein beantwortet wird, welche Strahlungsfelder durch ein Neutrino-feld von gegebener Energie sich darstellen lassen. Als Grenzfälle treten hierbei reine Neutrino-felder ohne Strahlungsenergie und reine Strahlungsfelder, deren Energie gleich der des Neutrino-felds ist, auf. Die Möglichkeit einer Beeinflussung des radioaktiven β -Zerfalls durch Strahlung wird berührt. *O. Klein* (Stockholm).

Blochinzew, D.: Zur Deuteron-Theorie. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 5, 907—910 (1935) [Russisch] u. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 270—274 (1935).

In der Kerntheorie werden Kräfte zwischen Neutron und Proton von sehr kurzer Reichweite und entsprechend großer Stärke angenommen. Verf. weist darauf hin, daß dadurch Relativitätskorrekturen notwendig werden, die bei einer Reichweite von 10^{-13} cm den Betrag von 10% der potentiellen Energie erreichen. *Bethe* (Ithaca).

Cartan, Louis: Sur l'accord des bilans d'énergie nucléaires avec les masses expérimentales des éléments légers. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 1363—1366 (1935).

Yukawa, Hideki, and Shoichi Sakata: On the theory of the β -disintegration and the allied phenomenon. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III.* s. 17, 467—479 (1935).

Nach der Theorie von Fermi (vgl. dies. Zbl. 9, 91) kann ein Kern mit der Ladung Z sich dadurch in einen Kern von der Ladung $Z-1$ verwandeln, daß er ein Elektron aus der K -Schale einfängt und ein Neutrino emittiert. Dieser Prozeß erfordert weniger Überschußenergie als der normalerweise beobachtete Prozeß der Emission eines positiven Elektrons. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für diese beiden Prozesse wird berechnet für den Fall, daß beide energetisch möglich sind. Es stellt sich heraus, daß die Wahrscheinlichkeit der Emission eines positiven Elektrons stets wesentlich größer ist, es sei denn, daß es sich um einen sehr schweren Kern und um eine sehr kleine Überschußenergie handelt. Die Lebensdauer von H^3 gegenüber Verwandlung in H^2 mit dem erwähnten Prozeß wird auf 50 Jahre abgeschätzt. *R. Peierls*.

Antunez de Mayolo, Santiago: Interprétation du coefficient α de structure fine. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 1097—1099 (1935).

Spekulationen (im wesentlichen Dimensionsbetrachtungen) über Sommerfelds Feinstrukturkonstante α als Folgerung aus einer früheren Note des Verf. (dies. Zbl. 11, 328). (Die Spekulationen haben keinerlei Erfahrungsgrundlage. *D. Ref.*) *Bechert*.

Fock, V.: Zur Theorie des Wasserstoffatoms. *Z. Physik* 98, 145—154 (1935). Vgl. dies. Zbl. 12, 184.

Joos, Georg, und Wolfgang Finkelburg: Kontinuierliche Spektren. *Physik. Z. 4*, 35—46 (1936).

● **Kronig, R. de L.: The optical basis of the theory of valency.** (Cambridge ser. of physical chem. Edit. by E. K. Rideal.) Cambridge: Univ. press 1935. X, 246 pag. a. 67 fig. bound 16/-.

Das vorliegende Buch ist in erster Linie für den Chemiker geschrieben. Es werden deshalb mathematische Entwicklungen weitgehend vermieden und bei theoretischen Ausführungen der Gedankengang in den Vordergrund gestellt, wobei möglichst die Analogien zwischen klassischen und quantentheoretischen Vorstellungen berücksichtigt werden. Entsprechend dem Leserkreis, für den das Buch vorwiegend bestimmt ist, wird auch auf die Behandlung feinerer Detailfragen meist verzichtet. Das Buch gliedert sich in folgende Kapitel: I. Einleitung. II. Die Untersuchung der Atom- und Molekülstruktur mittels Röntgen- und Kathodenstrahlen. III. Atomspektren und periodisches System. IV. Bandenspektren und chemische Bindung in zweiatomigen Molekülen. V. Bandenspektren und chemische Bindung in mehratomigen Molekülen. VI. Optische und thermische Dissoziation. — Die Anordnung des Stoffes im einzelnen ist außerordentlich übersichtlich und die Art der Darstellung meisterhaft klar. *E. Hückel* (Stuttgart).

Buchheim, Wolfgang: Beeinflussung des Ramaneffektes von Flüssigkeiten durch zwischenmolekulare Wirkungen. *Physik. Z.* 36, 694—711 (1935).

Verf. versucht, eine Abschätzung des Einflusses elektrischer Felder auf das Schwingungsspektrum von Molekülen durchzuführen, und gelangt zu dem Er-

gebnis, daß für äußere Felder der höchsten verfügbaren Feldstärken kein merklicher Effekt zu erwarten ist, hingegen innere, von Ionen oder Dipolmolekülen hervorgerufene Felder eine beobachtbare Verbreiterung und Schwerpunktsverschiebung von Schwingungsramanlinien verursachen können. Die Veränderung der Gleichgewichtsabstände der Atome durch das Feld bewirkt ferner eine Intensitätsänderung der Ramanlinien, die — bei Abstandsänderungen von der Größenordnung der Nullpunktsamplitude, wie sie für die stärksten inneren Felder in Flüssigkeiten zu erwarten sind — einige Prozent betragen kann. Der gleiche Mechanismus führt auch zu Durchbrechung der Auswahlregeln (Auftreten verbotener Linien). — Weiterhin wird über Experimente über die Abhängigkeit der relativen Intensität verschiedener Schwingungslinien der gleichen Substanz vom Lösungsmittel berichtet, durch die — nach Ansicht des Verf. — Änderungen des Intensitätsverhältnisses um einige Prozent wahrscheinlich gemacht werden konnten.

Placzek (Kopenhagen).

Hermans, J. J.: Über die Ionenbeweglichkeit. *Z. Physik* **97**, 681—689 (1935).

Nach M. Born wird die Ionenbeweglichkeit zufolge der Mitbewegung der Dipole des Lösungsmittels vermindert. Die Bornsche Lösung verletzt jedoch die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik. Verf. versucht daher eine genauere Lösung zu erhalten und findet eine angenähert lineare Konzentrationsabhängigkeit der Ionenbeweglichkeit. Eine genauere Begründung seiner theoretischen Ergebnisse gibt Verf. nicht. Auch fehlt jede Diskussion.

Falkenhagen (Dresden).

Smekal, Adolf: Elektrophysik der Festkörper. A. Allgemeines. Feste Ionenleiter. Physik regeln. *Ber.* **4**, 17—33 (1936).

Hund, F.: Theorie der Elektronenbewegung in nicht-metallischen Kristallgittern. (11. *Deutsch. Physik.-Tag., Stuttgart, Sitzg. v. 22.—28. IX. 1935.*) *Physik. Z.* **36**, 725 bis 729 (1935).

Bericht über die Resultate der Theorie.

R. Peierls (Cambridge).

Hund, F.: Zustände der Elektronen in Kristallgittern. (11. *Deutsch. Physik.-Tag., Stuttgart, Sitzg. v. 22.—28. IX. 1935.*) *Physik. Z.* **36**, 888—891 (1935).

Für eine Reihe von Gittertypen ist es möglich, die Lage der Elektronenterme näherungsweise zu berechnen und zu untersuchen, wann die Bedingungen für metallische Leitfähigkeit erfüllt sind.

R. Peierls (Cambridge).

London, F., und H. London: Supraleitung und Diamagnetismus. *Physica* **2**, 341 bis 354 (1935).

Die persistenten Ströme in Supraleitern werden auf Grund der Londonschen Gleichungen für den supraleitenden Zustand diskutiert. Modellvorstellungen, die zu diesen Gleichungen führen könnten, werden geschildert.

Bethe (Ithaca).

Cernuschi, Félix: Theorie des kritischen Feldes in festen Dielektriken. *Rev. Acad. Ci. exact. Madrid* **32**, 323—329 (1935) [Spanisch].

Mit einem eindimensionalen Modell [nach Kronig und Penney, *Proc. Roy. Soc. A* **130**, 499 (1931); dies. *Zbl.* **1**, 106] versucht der Verf. eine Theorie der kritischen elektrischen Feldstärke für feste Dielektrika zu geben. Er findet die kritische Feldstärke von der Ordnung $10^8 \frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$. Bekanntlich liegt sie bei wesentlich geringeren Feldstärken; Verf. nimmt als Erklärung dafür an, daß zwischen den erlaubten Energiebändern des Isolators „Verunreinigungen“ vorhanden sind, die den Elektronensprung von einem Band zum anderen ermöglichen. (Wie er sich diese „Verunreinigungen“ der Energiebänder denkt und wie sie den Sprung ermöglichen sollen, gibt der Verf. nicht an; d. Ref.)

Bechert (Gießen).

Odone, Filippo: Equilibrio elettrico su sistemi formati di soli conduttori metallici e correnti termo-elettriche permanenti in circuiti completamente metallici. *Nuovo Cimento, N. s.* **12**, 522—530 (1935).

Fortsetzung von 2 früheren Arbeiten des Verf. [*Nuovo Cimento* **11**, 361 (1934) **12**, 273 (1935); dies. *Zbl.* **9**, 422 u. **12**, 187]. Die früher gegebene „thermodynamische“

Theorie thermoelektrischer Vorgänge wird auf das elektrische Gleichgewicht und auf stationären Strom in metallischen Leitern (bei räumlich veränderlicher Temperatur) angewendet. Verf. leitet eine Potentialdifferenz zwischen Metallinnerem und Metalloberfläche ab; Betrachtung von Volta-, Peltier- und Thomsons Effekt. Zum Schluß Kritik der von Lord Kelvin gegebenen Theorie thermoelektrischer Vorgänge.

Bechert (Gießen).

Fowler, R. H.: A theory of the rotations of molecules in solids and of the dielectric constant of solids and liquids. *Proc. Roy. Soc. London A* **149**, 1—28 (1935).

Es wird angenommen, daß die Kraft, die die Rotation eines Moleküls im Kristallgitter (oder einer Flüssigkeit) zu verhindern sucht, um so größer ist, je kleiner die Anzahl der rotierenden Moleküle. Eine gewisse Willkür tritt hierin durch die Definition dessen ein, was man ein rotierendes Molekül nennt (d. h. wo man die Grenze zwischen Rotation und Drehschwingung zieht). Dementsprechend enthalten die Resultate der Theorie einen freien Parameter. Es stellt sich heraus, daß man qualitativ die Kurven für die Anomalien in der spezifischen Wärme von Dipolsubstanzen und für die Anomalien in der Dielektrizitätskonstante von Seignettesalz verstehen kann, wenn man diesem geeignete Werte gibt. Jedoch sind die experimentellen Kurven auf ein viel kleineres Temperaturintervall zusammengedrängt, als die Theorie zu erklären imstande ist.

R. Peierls (Cambridge).

Fowler, R. H.: The Bakerian lecture. The anomalous specific heats of crystals, with special reference to the contribution of molecular rotations. *Proc. Roy. Soc. London A* **151**, 1—22 (1935).

Bericht über die verschiedenen Typen von anomalem Verhalten, die die spezifische Wärme von festen Körpern zeigen kann. Besonders ausführlich wird die Anomalie behandelt, die von dem „Einfrieren“ innerer Rotationen herkommt. Zu der Theorie des Verf. (vgl. vorsteh. Ref.) werden einige ergänzende Bemerkungen hinzugefügt und die Theorie wird auf die Anomalie in der thermischen Ausdehnung hingewiesen. Es ist nicht erstaunlich, daß in einigen Fällen mit dem „Auftauen“ der Rotation eine Volumenverminderung verbunden ist.

R. Peierls (Manchester).

Frenkel, J.: Über die Drehung von Dipolmolekülen in festen Körpern. *Acta physicochim.* (Moskva) **3**, 23—36 (1935).

In einer Behandlung des gleichen Problems hatte Fowler (vgl. die vorsteh. Ref.) angenommen, daß die Kraft, die die Rotation eines Moleküls verhindert, proportional der Anzahl der nichtrotierenden Moleküle ist. Als nichtrotierend waren die Moleküle definiert, deren kinetische Energie unter einer gewissen Schwelle liegt. Es wird nun gezeigt, daß der aus diesem Grunde bei Fowler willkürliche Parameter in Wirklichkeit nicht willkürlich ist und daß man ihm einen Wert geben muß, der die von Fowler erhaltene Übereinstimmung mit dem Experiment zerstört. Außerdem wird darauf hingewiesen, daß die Einführung der kinetischen Energie, solange man klassische Statistik verwendet, nur eine überflüssige Komplikation bedingt. Als Grund für die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment wird die Tatsache vermutet, daß auch bei Temperaturen oberhalb der Anomalie, bei denen alle Moleküle rotieren und bei denen daher die orientierende Kraft im Mittel Null ist, trotzdem noch starke Kräfte zwischen benachbarten Molekülen auftreten. Diese Kräfte sind in der bisherigen Theorie vernachlässigt, da diese nur mit Mittelwerten rechnet.

R. Peierls.

Klassische Theorie der Elektrizität.

● **Biggs, H. F.:** The electromagnetic field. Oxford: Clarendon press 1934. VIII, 158 pag. a. 38 fig. bound 10/6.

Das Buch soll für englische Studenten dienen; die Darstellung ist sehr elementar. Die Elektrodynamik wird aus den Eigenschaften der Punktladungen entwickelt. Inhalt: I. Vektorbegriff und statische Felder. II. Elektrodynamik, die Umlaufrelationen. (Enthält auch den

Larmorschen Satz und den Faradayeffekt.) III. Die Maxwellschen Feldgleichungen. (Enthält auch die klassische Dispersionstheorie in kurzem Abriss.) IV. Energie des Feldes; die allgemeinen elektrodynamischen Potentiale; Impuls. (Enthält Hertzische Wellen, retardierte Potentiale, klassische Theorie der Lichtstreuung, Strahlungsdruck und Maxwellsche Spannungen.) V. Spezielle Relativität und elektromagnetisches Feld. Für Anfänger eine nützliche und recht weitgehende Einführung, für ernsthaftes Physikstudium aber wohl unzureichend. Der Experimentalphysiker wird z. B. die Darstellung der Beziehung zwischen den „theoretischen“ Einheiten und den gesetzlich festgelegten Einheiten vermissen, der angehende Theoretiker wird mit der mathematischen Beweisführung in manchen Punkten nicht zufrieden sein. Insbesondere ist zu beklagen, daß fast keine Anwendungsbeispiele zu finden sind. *Bechert*.

Flamm, Ludwig: Algebraische Elektrodynamik. S.-B. Akad. Wiss. Wien 1935, 243—261 (H. 5/6).

Wendet man die allgemeine Vektorformel $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \gamma \mathfrak{v} = \text{rot} [\mathfrak{b} \mathfrak{A}]$, wobei $\gamma = \text{div} \mathfrak{A}$ ist, auf die beiden elektromagnetischen Feldgleichungen von Maxwell an, so ist für den Fall $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D}$ die Geschwindigkeit \mathfrak{v} jene der elektrischen Ladungen, welche den Konvektionsstrom bilden; im Falle $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ kann nichts über die Geschwindigkeit vorausgesagt werden, der Autor nennt sie \mathfrak{u} , eine verfügbare Vektorgroße. Die Wahl $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ führt auf die gewöhnliche elektromagnetische Welle. Allgemein zeigt aber der Autor, daß $uv = \frac{1}{\epsilon \mu}$ gilt, wenn ϵ und μ die absoluten Werte von Dielektrizitätskonstante und Permeabilität sind. Für leeren Raum wird daraus $uv = c^2$, die bekannte Beziehung für Gruppen- und Phasengeschwindigkeit von Wellenpaketen. Für den Fall eines gleichförmig bewegten Elektrons wird dann gezeigt, daß die korpuskulare Geschwindigkeit der Konvektionsgeschwindigkeit v des Elektrons und die Phasengeschwindigkeit der Materiewellen der Axialgeschwindigkeit (in der Richtung v) der magnetischen Feldlinien entsprechen. *Ernst Weber* (New York).

Schlomka, Teodor: Über eine Methode zur Berechnung von Vektorpotentialfeldern. (11. Deutsch. Physik.-Tag., Stuttgart, Sitzg. v. 22.—28. IX. 1935.) Physik. Z. 36, 873—875 (1935).

Es wird eine Methode angegeben, zu dem bekannten Magnetfeld eines stationären Stromes das Vektorpotential zu bestimmen. Die Methode beruht auf einem bekannten Satz der Vektorrechnung. *Bechert* (Gießen).

Siracusano, Natalizio: Sulle posizioni fondamentali dell'elettromagnetismo. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei 88, 257—264 (1935).

Spekulationen über gekoppelte elektrische Dipole (nach Art des von de Broglie vorgeschlagenen Photonenmodells). Mit Hilfe von 13 Hypothesen über die Art und Wirkungsweise dieser Dipole leitet der Verf. die Maxwell-Lorentz'schen Gleichungen ab. *Bechert* (Gießen).

Andronescu, Pl.: Das Problem der Dimensionen der Einheiten elektrischer und magnetischer Größen. Arch. Elektrotechn. 30, 46—57 (1936).

● **Henriot, Émile: Les couples de radiation et les moments électromagnétiques.** Mém. Sci. physiques Fasc. 30, 58 S. (1935).

Im wesentlichen zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse früherer Arbeiten des Verf. (Bull. Cl. Sc. Acad. Roy. de Belgique, seit 1934) über den Gegenstand. In Analogie zum symmetrischen Energie-Impuls-Tensor T der Maxwellschen Theorie wird ein antisymmetrischer Tensor Γ betrachtet, der z. B. bei den Kraftwirkungen eine Rolle spielt, die das Licht auf materielle Körper ausübt; für Γ gelten ähnliche Differentialbeziehungen wie für T . Eine Reihe von interessanten Anwendungen auf optische Probleme wird gegeben. Inhalt: I. Problemstellung. II. Die „antisymmetrische Seite“ der Elektrodynamik. (Enthält die Definition von Γ .) III. Anwendung auf elektromagnetische Vorgänge im Vakuum. (Behandelt u. a. die „klassische“ Strahlung eines Bohrschen Atoms.) IV. Anwendung auf den Fall polarisierbarer Medien. V. „Zurück zu den allgemeinen Gleichungen.“ (Enthält Anwendungen auf doppelbrechende Medien, „Mitführung“ von Wellen im bewegten Medium.) VI. Die „Momente“ in der Lorentz'schen Theorie. VII. Über den Doppler-Fizeau-Effekt, der durch Rotation erzeugt wird. VIII. Schlußwort. *Bechert* (Gießen).